Exercice 1 **5 points**

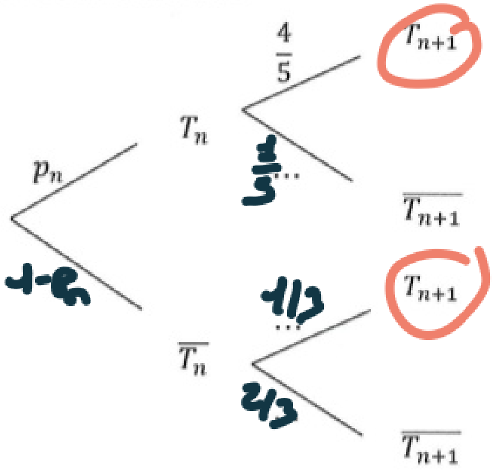
Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre.
On modélise la situation de la façon suivante :

- au premier tir, il atteint le centre de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$;
- pour les tirs suivants :
  - lorsqu'il a atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne à nouveau le centre de la cible est $\frac{4}{5}$;
  - lorsqu'il n'a pas atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne le centre de la cible est $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement T_n : « Le tireur atteint le centre de la cible au n-ième tir ».
On note $p_n = P(T_n)$ la probabilité que l'évènement T_n se réalise.

1. Donner la valeur de p_1 et montrer que $p_2 = \frac{17}{30}$.

2. Recopier sur la copie l'arbre de probabilité suivant et compléter les pointillés avec les probabilités qui conviennent :



3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$p_1 = \frac{1}{2}$

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3}}$$

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = p_n - \frac{5}{8}$$

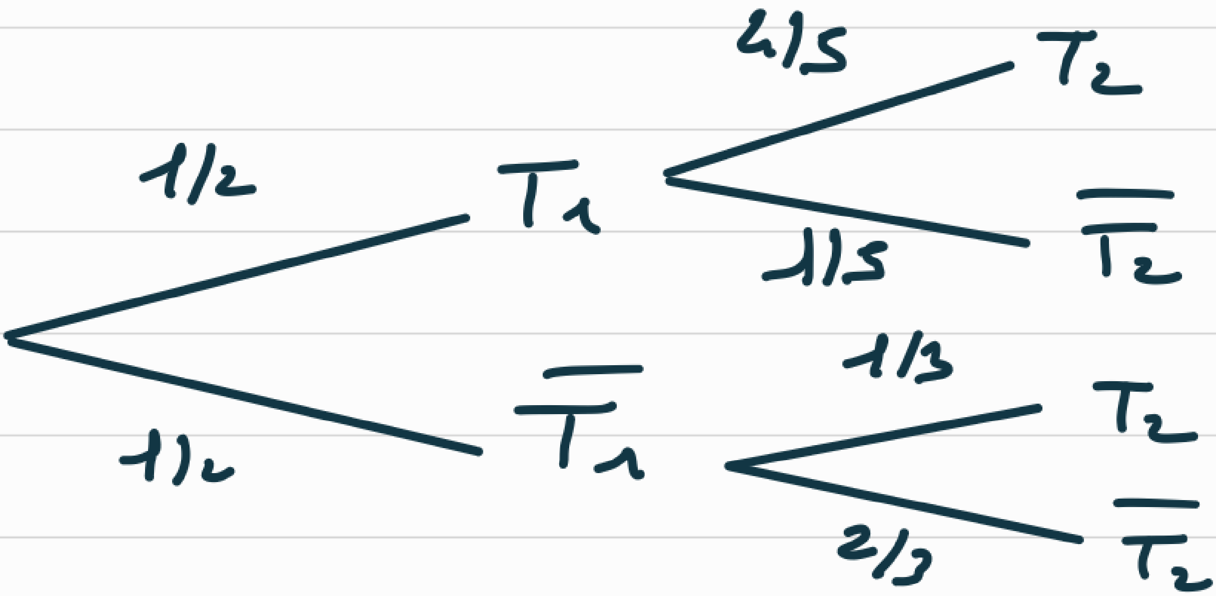
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$.

   b. Déterminer une expression de u_n en fonction de n. $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}$

   c. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

5. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

1) $p_1 = \frac{1}{2}$



D'après la formule des probabilités totales :

$$p_2 = \mathbb{P}(T_1 \cap T_2) + \mathbb{P}(\overline{T_1} \cap T_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{17}{30}$$

3) D'après les probabilités totales :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(T_{n+1})$$

$$= \mathbb{P}(T_n \cap T_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{T_n} \cap T_{n+1})$$

$$= p_n \times \frac{4}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{5} p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} p_n$$

$$= \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3}.$$

4) a) $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{5}{8}$

$$= \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3} - \frac{5}{8}$$

$$= \frac{7}{15} p_n - \frac{7}{24}$$

$$= \frac{7}{15} \left(p_n - \frac{7/24}{7/15} \right)$$

$$= \frac{7}{15} \left(p_n - \frac{5}{8} \right)$$

$$= \frac{7}{15} u_n .$$

donc (u_n) est géométrique de raison $\frac{7}{15}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}$.

5) $p_n = -\frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} + \frac{5}{8}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} = 0$ car $-1 < \frac{7}{15} < 1$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{5}{8}$

Exercice 3 **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ de l'espace, on considère les points suivants $A(0;0;1)$; $B(1;2;3)$; $C(3;3;1)$; $E(2;-2;2)$; $F(3;0;4)$ et $G(5;1;2)$.

1. **a.** Montrer que les points B, C et E ne sont pas alignés.

   b. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est normal au plan (BCE).

   c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BCE) est $x+z-4=0$.

2. **a.** Montrer que le point G n'appartient pas au plan (BCE).

   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires.

   c. En déduire que la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.

Pour la suite de l'exercice, on appellera P le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BCE).

3. **a.** Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (AG) est :

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

   b. En déduire les coordonnées du point P.

   c. Montrer que le point P est le milieu du segment [EC].

4. Déterminer l'intersection des plans (BCE) et (ACG). (CP)

1) a) $\overrightarrow{BC}(2;1;-2)$

$\overrightarrow{BE}(1;-4;-1)$

$\frac{2}{1} = 2 \neq \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$