Exercice 1 **5 points**

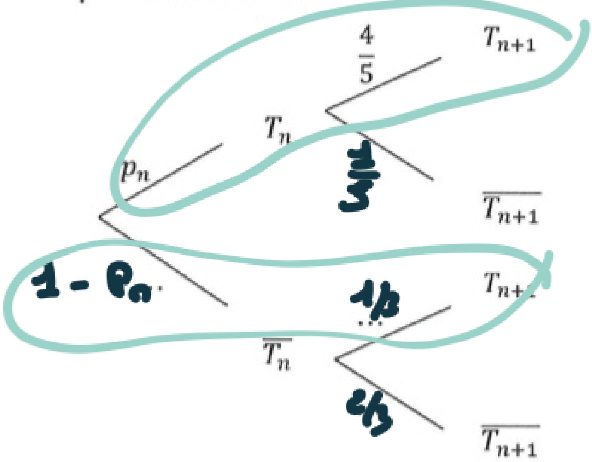
Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre.
On modélise la situation de la façon suivante :

- au premier tir, il atteint le centre de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$;
- pour les tirs suivants :
  - lorsqu'il a atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne à nouveau le centre de la cible est $\frac{4}{5}$;
  - lorsqu'il n'a pas atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne le centre de la cible est $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement T_n : « Le tireur atteint le centre de la cible au n-ième tir ».
On note $p_n = P(T_n)$ la probabilité que l'évènement T_n se réalise.

1. Donner la valeur de p_1 et montrer que $p_2 = \frac{17}{30}$.

2. Recopier sur la copie l'arbre de probabilité suivant et compléter les pointillés avec les probabilités qui conviennent :



3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}}$$

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = p_n - \frac{5}{8}$$

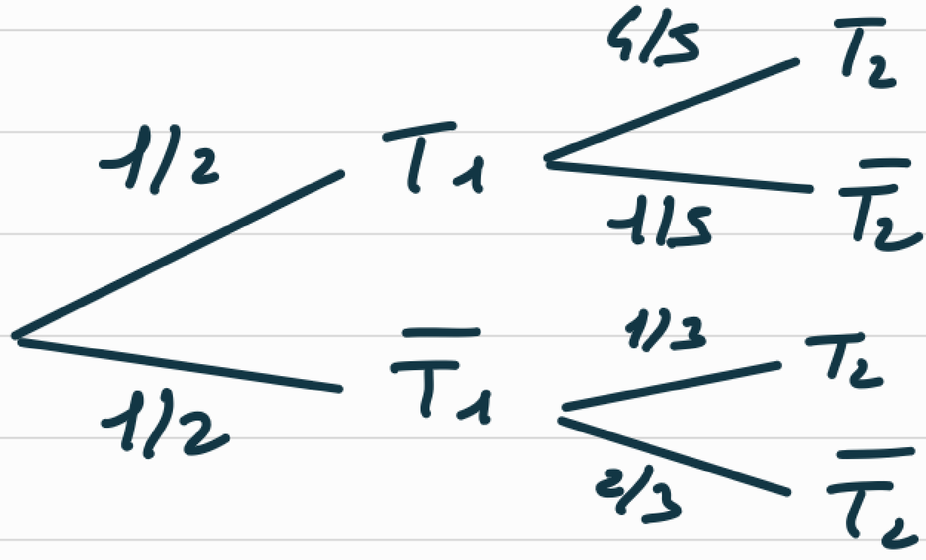
a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$.

b. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

c. En déduire une expression de p_n en fonction de n. $P_n = -\frac{1}{8} \times \underbrace{\left(\frac{7}{15}\right)}_{\to 0}^{n-1} + \frac{5}{8}$

5. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

1)



D'après les probabilités totales

$$p_2 = P(T_1 \cap T_2) + P(\overline{T_1} \cap T_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{17}{30}.$$

3) D'après les probabilités totales :

$$P_{n+1} = \mathbb{P}(T_{n+1})$$

$$= \mathbb{P}(T_n \cap T_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{T_n} \cap T_{n+1})$$

$$= P_n \times \frac{4}{5} + (1-P_n) \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{5}P_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}P_n$$

$$= \frac{7}{15}P_n + \frac{1}{3}.$$

4) a) $$u_{n+1} = P_{n+1} - \frac{5}{8}.$$

$$= \frac{7}{15}P_n + \frac{1}{3} - \frac{5}{8}$$

$$= \frac{7}{15}P_n - \frac{7}{24}.$$

$$= \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{7/24}{7/15}\right)$$

$$= \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{5}{8}\right)$$

$$= \frac{7}{15} u_n$$

donc $u_{n+1} = \frac{7}{15} u_n$ et

(u_n) est géométrique de raison $\frac{7}{15}$

b) $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -\frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}$

$u_1 = p_1 - \frac{5}{8} = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}$

c) $u_n = p_n - \frac{5}{8}$

$u_n + \frac{5}{8} = p_n$

donc $p_n = -\frac{1}{8} \times \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} + \frac{5}{8}$

Exercice 3 **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de l'espace, on considère les points suivants $A(0; 0; 1)$; $B(1; 2; 3)$; $C(3; 3; 1)$; $E(2; -2; 2)$; $F(3; 0; 4)$ et $G(5; 1; 2)$.

1. **a.** Montrer que les points B, C et E ne sont pas alignés.

   b. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est normal au plan (BCE).

   c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BCE) est $\boxed{x + z - 4 = 0}$.

2. **a.** Montrer que le point G n'appartient pas au plan (BCE).

   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires.

   $\overrightarrow{BE} = x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{AG}$

   c. En déduire que la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.

Pour la suite de l'exercice, on appellera P le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BCE).

3. **a.** Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (AG) est :

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$5t + 1 + t - 4 = 0$

$6t - 3 = 0$

$6t = 3 \Leftrightarrow t = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

   b. En déduire les coordonnées du point P.

   $P\left(\frac{5}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$

   c. Montrer que le point P est le milieu du segment [EC].

   $\hookrightarrow \left(\frac{x_E + x_C}{2} ; \frac{y_E + y_C}{2} ; \frac{z_E + z_C}{2}\right)$

4. ~~Déterminer l'intersection des plans (BCE) et (ACG)~~.

1) a) $\overrightarrow{BC}(2 ; 1 ; -2)$

$\overrightarrow{BE}(1 ; -4 ; -1)$

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-4}$

donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points ne sont pas alignés.

c) $\vec{AF}(3;0;3)$ normal

↳ $3x + 3z + d = 0$

or $B(1;2;3) \in (BCE)$

$3 \times 1 + 3 \times 3 + d = 0$

$3 + 9 + d = 0$

$12 + d = 0$

$d = -12$.

$$3x + 3z - 12 = 0$$

$$\div 3$$

$$x + z - 4 = 0$$