Ex 2. *(3.5 pts)* On considère le système linéaire $Ax = b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -13 \\ 29 \end{pmatrix}.$$

1) Identifier s'il s'agit d'un système surdéterminé ou sousdéterminé.

2) Pour cette question, choisissez l'item • correspondant à votre réponse en **1)**.

• S'il s'agit d'un système surdéterminé :

a) Calculer la ou les pseudo-solutions au sens des moindres carrés.

b) Quelle propriété vérifie cette (ou ces) pseudo-solution(s) ?

c) Dire si le système de départ est compatible ou non.

• S'il s'agit d'un système sousdéterminé :

a) Indiquer s'il est compatible ou non.

b) Déterminer la solution au sens des moindres carrés.

c) Quelle propriété vérifie cette solution ?

1) . 2 lignes : équations

. 4 colonnes : inconnues

Il s'agit d'un système sousdéterminé.

2) a) $\begin{cases} x - 2y + z + 3t = -13 \\ -x + 2y + 3z + t = 29 \end{cases}$

⋮

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = t + \frac{x}{2} + \frac{17}{2} & , t, x \in \mathbb{R} \\ z = 4 - t & , t \in \mathbb{R} \end{cases}$

donc il est compatible.

b) 1 on résoud :

$AA^T z = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 29 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15z_1 + z_2 = -13 \\ z_1 + 15z_2 = 29 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \ldots$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

2) $x_* = A^T z$

$$= \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $\|x_*\| = \inf \{ \|x\| : x \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tel que $Ax = b \}$

$$= \mu(A, b).$$

Ex 3. *(8 pts)* On travaille dans $\mathbb{R}^4$. On considère les vecteurs

$$H_1 = (1,1,1,1), \quad H_2 = (1,1,-1,-1), \quad H_3 = (1,-1,0,0), \quad H_4 = (0,0,1,-1).$$

1) *a)* Montrer que (H_1, H_2, H_3, H_4) est une famille orthogonale.
b) Est-elle orthonormée ?
c) Déterminer la famille $\mathcal{B}$ obtenue en orthonormalisant (H_1, H_2, H_3, H_4) selon Gram-Schmidt.

2) Est-ce que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$? Si oui, décomposer le vecteur $u = (1,2,3,4)$ sur cette base.

3) Si cela est possible, construire une matrice Q orthogonale dont la colonne 1 est colinéaire à H_4, la colonne 2 est colinéaire à H_2, la colonne 3 est colinéaire à H_3 et la colonne 4 est colinéaire à H_1. Si cela n'est pas possible, on expliquera pourquoi.

$$Q = \begin{array}{c} \begin{matrix} H_4 & H_2 & H_3 & H_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} | & | & | & | \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad QQ^T = I_4 \,?$$

4) Déterminer la projection orthogonale du vecteur $w = (4,2,3,1)$ sur $\mathrm{Vect}(H_2, H_4)$ ainsi que la distance de ce vecteur à $\mathrm{Vect}(H_2, H_4)$.

1) a) $H_i \cdot H_j = 0, \quad \forall\, i \neq j$

donc (H_1, H_2, H_3, H_4) est une famille orthogonale.

b) $\|H_1\| = \sqrt{4} = 2 = \|H_2\|$

$\|H_3\| = \sqrt{2} = \|H_4\|$

Les normes sont toutes différentes de 1, donc la famille n'est pas orthonormée.

c) $b_1 = \frac{H_1}{\|H_1\|} = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

$b_2 = \frac{H_2}{\|H_2\|} = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$

$b_3 = \frac{H_3}{\|H_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$

$b_4 = \frac{H_4}{\|H_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, -1)$

2) $\mathcal{B}$ est une famille orthonormée de 4 vecteurs non nuls.

Donc, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

- $u(1, 2, 3, 4)$

$$\boxed{u = \sum_{j=1}^{4} \overbrace{(u \cdot b_j)}^{\text{coordonnées}} \overbrace{b_j}^{\text{nouvelle base}} .}$$

$u \cdot b_1 = 5$

$u \cdot b_2 = -2$

$u \cdot b_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$u \cdot b_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

donc :

$$u = 5 b_1 - 2 b_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} b_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} b_4$$

$\hookrightarrow$ $u \left(5 \,;\, -2 \,;\, -\frac{\sqrt{2}}{2} \,;\, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

3) on pose :

$$Q = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \;\; b_4 \quad & \quad b_2 \quad & \quad b_3 \quad & \quad b_1 \end{array} \end{array}$$

4)

$$P_{\underbrace{F}_{Vect\{H_2,H_4\}}} w = \frac{w \cdot H_2}{\|H_2\|^2} \times H_2 + \frac{w \cdot H_4}{\|H_4\|^2} \times H_4$$

$$= \boxed{(w \cdot b_2) \times b_2 + (w \cdot b_4) \times b_4}$$

$$P_F w = \frac{1}{2} b_2 + \sqrt{2}\, b_4$$

$$= \left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{3}{4} ; -\frac{5}{4} \right)$$

- $Dist(w, \underbrace{F}_{Vect\{H_2,H_4\}}) = \|w - P_F w\|$

$$w - p_F w \left(\frac{15}{4} ; \frac{7}{4} ; \frac{9}{4} ; \frac{21}{4} \right)$$

$$\| w - p_F w \| = \sqrt{\frac{199}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{199}}{2}$$