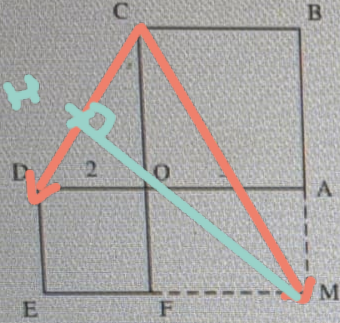


exercice ✓ :

⑤ (4 points) OABC et ODEF sont des carrés dont les côtés respectifs mesurent 3 et 2. OAMF est un rectangle. On note H le projeté orthogonal du point M sur la droite (DC).

On donne le repère orthonormé $(O, \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{3}\overrightarrow{OC})$.



1. Donner les coordonnées des points C, D et M.
2. La droite (OM) est-elle perpendiculaire à la droite (DC)?
3. Calculer $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CM}$.
4. En déduire la longueur CH.

$$1) C(0; 3) \quad D(-2; 0)$$

$$M(3; -2)$$

$$2) \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{DC} = 3 \times 2 + (-2) \times 3$$

$$= 6 - 6 = 0$$

$$\vec{ON} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{DC} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

donc les droites sont perpen.

$$3) \quad \vec{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{CH} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CD} \cdot \vec{CH} = -6 + 15 = 9$$

$$4) \quad \vec{CD} \cdot \vec{CH} = CD \times CH$$

$$9 = \sqrt{13} \times CH$$

$$CD = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{donc } CH = \frac{9}{\sqrt{13}}$$

DEUXIÈME PARTIE (14 points)

Exercice 1 (~6 points)

Partie A : Modèle continu

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R}^* par $g(x) = \frac{3+x}{2x}$ et la fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x - 2$.

1. Montrer que trouver les abscisses des points d'intersection entre g et f revient à résoudre sur \mathbb{R}^*

$$\frac{-2x^2 + 5x + 3}{2x} = 0$$

2. Donner les coordonnées de ces points d'intersection.
3. Dresser le tableau de signes de l'expression $\frac{-2x^2 + 5x + 3}{2x}$.
4. En déduire les positions relatives de C_f et C_g , respectivement courbes représentatives de f et g .

Partie B : Modèle discret

On pose (u_n) suite définie sur \mathbb{N} et (v_n) suite définie sur \mathbb{N}^* respectivement par :

$$u_n = f(n) = n - 2 \quad \text{et} \quad v_n = g(n) = \frac{3+n}{2n}$$

1. Pour chacune de ces deux suites, réponde aux questions suivantes :

- (a) Calculer le terme d'indice 2 et le 4^{ème} terme. u₁ v₂
u₃ v₁
- (b) Donner l'expression réduite du terme d'indice $n + 1$. ✓
- (c) Etudier le sens de variation avec la méthode de votre choix.

2. On définit la suite ~~(w_n) sur \mathbb{N}^* par $w_n = v_n - u_n$.~~

~~Etudier le sens de variation de (w_n) à l'aide de la méthode de votre choix.~~

1) $g(x) = f(x)$

$$\Leftrightarrow g(x) - f(x) = 0$$

$\Rightarrow \dots$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 5x + 3}{2x} = 0$$

$$2) \frac{-2x^2 + 5x + 3}{2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$\Delta = 49 > 0$$

$$x_1 = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$f(x_1) = 1 \quad \text{et} \quad f(x_2) = -\frac{5}{2}$$

$$g(x_1) = 1 \quad \text{et} \quad g(x_2) = -\frac{5}{2}$$

donc les coordonnées :

$(3; 1)$ et $(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2})$.

3)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	3	$+\infty$
$-2x^4 + 5x + 3$	-	\emptyset	+	\emptyset	-
$2x$	-	\emptyset	+		
$\frac{-2x^2 + 5x + 3}{2x}$	\emptyset	\emptyset	+	\emptyset	-

4)

$$g(x) - f(x) = -\frac{2x^2 + 5x + 3}{2x}$$

$$\bullet \frac{-2x^2 + 5x + 3}{2x} >, 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) - f(x) >, 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) >, f(x)$$

Donc E_g est au dessus de E_f sur $]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup]0; 3]$

et E_g est au dessous de E_f sur $[-\frac{1}{2}, 0[\cup [3; +\infty[$

Les parties A et B sont indépendantes.

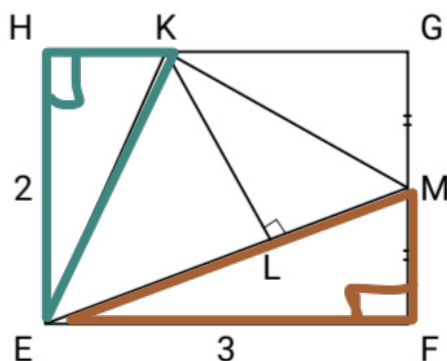
Partie A :

$EFGH$ est un rectangle avec $EH = 2$ et $EF = 3$. M est le milieu de $[FG]$ et K est défini par $\vec{HK} = \frac{1}{3}\vec{HG}$.

L est le projeté orthogonal de K sur la droite (EM) .

$$EK^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

$$EK = \sqrt{5}$$



$$EM^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$\Rightarrow EM = \sqrt{10}$$

1. Montrer que $\vec{EK} \cdot \vec{EM} = 5$. On pourra s'aider de la relation de Chasles. ✓
2. En écrivant le produit scalaire de $\vec{EK} \cdot \vec{EM}$ de deux manières différentes, déterminer :
 - (a) La longueur EL .
 - (b) Une mesure de l'angle \widehat{KEM} .

$$2) a) \underbrace{\vec{EK} \cdot \vec{EM}}_5 = EL \times \underbrace{EM}_{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow EL = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$b) \underbrace{\vec{E}_K \cdot \vec{E}_M}_{5} = \underbrace{E_K}_{\sqrt{5}} \times \underbrace{E_M}_{\sqrt{10}} \times \cos(\widehat{KEM})$$

$$\frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \cos(\widehat{KEM})$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\widehat{KEM})$$

$$\Rightarrow \widehat{KEM} = \frac{\pi}{4}$$

Partie B :

Soit x réel et $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé avec $A(x; -2)$, $B(x+4; x+3)$ deux points du plan.

1. Exprimer $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ en fonction de x .
2. Déterminer pour quelles valeurs de x le triangle OAB est rectangle en O .
3. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 2x - 6$.
 - (a) Etudier ses variations sur \mathbb{R} .
 - (b) En déduire pour quelle valeur de x le produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ est minimal. $x = -1$
 - (c) Déterminer alors une valeur arrondie au degré près de l'angle \widehat{BOA} .

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= x(x+4) + (-2)(x+3) \\ &= x^2 + 4x - 2x - 6 \\ &= x^2 + 2x - 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= 0 \\ x^2 + 2x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

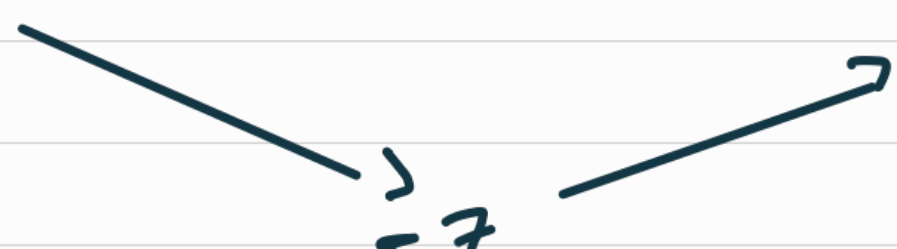
$$\Delta = 28 > 0$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{28}}{2} = -1 - \sqrt{7}$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{28}}{2} = \sqrt{7} - 1$$

donc $x = -1 - \sqrt{7}$ et $\sqrt{7} - 1$.

3) a) $f'(x) = 2x + 2$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	$-$	\emptyset	$+$
f			

$$f(-1) = (-1)^2 + 2x - 1 - 6$$

$$c) \underbrace{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}_{-7} = OA \times OB \times \cos(\widehat{BOA})$$

$$OA = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$OB = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$-7 = \sqrt{5} \times \sqrt{13} \times \cos(\widehat{BOA})$$

$$\Rightarrow \frac{-7}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}} = \cos(\widehat{BOA})$$
$$\approx 150^\circ$$

Question 3

Soit la relation suivante : $C = \frac{2}{x} + \frac{3}{y}$. On peut alors affirmer que :

a) $x = 2 \left(\frac{1}{C} - \frac{y}{3} \right)$

b) $x = \frac{2y}{Cy - 3}$

c) $x = \frac{5 - Cy}{C}$

d) $x = \frac{5}{2C}$

$$C = \frac{2}{x} + \frac{3}{y}$$

$$C = \frac{2y + 3x}{xy}$$

$$Cxy = 2y + 3x$$

$$Cxy - 3x = 2y$$

$$x(Cy - 3) = 2y$$

$$x = \frac{2y}{Cy - 3}$$

Question 4

Dans un club sportif les trois quarts des adhérents sont mineurs et le tiers des adhérents majeurs a plus de 25 ans. La proportion des 18-25 ans est :

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{12}$

d) $\frac{1}{3}$

majeur = $\frac{1}{4}$ mineur = $\frac{3}{4}$

majeur + 25 ans = $\frac{1}{3}$

majeur 18-25 ans = $\frac{2}{3}$

Question 5

Le débit d'une rivière est de $36 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ son débit en $\text{L} \cdot \text{s}^{-1}$ est :

a) 3600

b) 10

c) 100

d) 1000

$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$

$36 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} = \frac{36 \times 1000}{3600} \frac{\text{L}}{\text{s}} = 10 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$

