Partie A

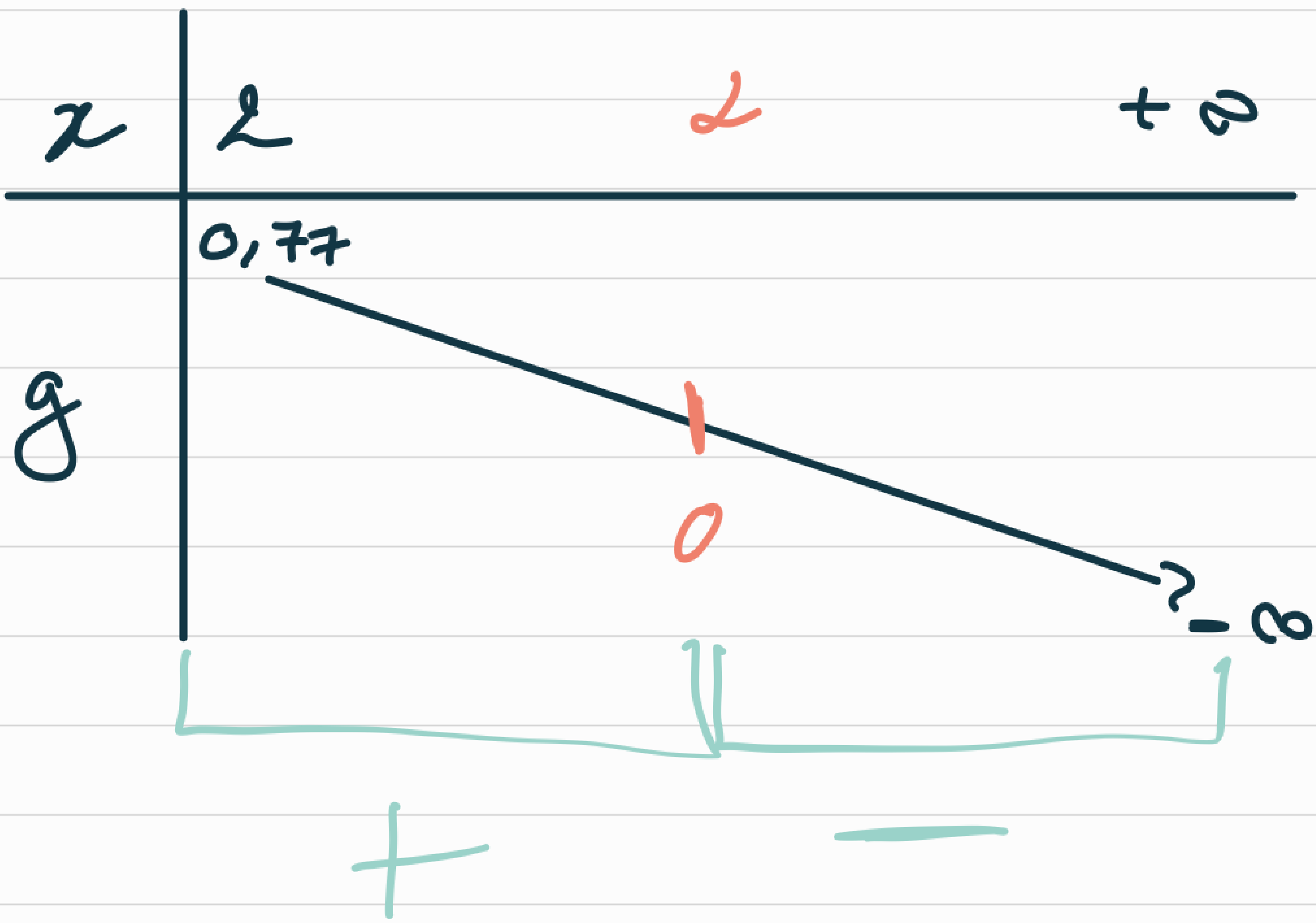
On note f la fonction définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par $f(x) = \ln(3x^2 + 2x)$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

2. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par $\boxed{g(x) = f(x) - x.}$
On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

$g(\alpha) = 0 \iff f(\alpha) - \alpha = 0 \iff f(\alpha) = \alpha$

   a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2;+\infty[$.
   b. Donner la valeur de α arrondie au centième.
   c. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[2;+\infty[$.



Partie B

Dans cette partie, les réponses pourront s'appuyer sur les résultats de la **partie A**.

On définit une suite (a_n) par son premier terme $a_0 > 0$ et pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n)$$

On étudie le cas où $2 \leq a_0 \leq \alpha$, où α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $\boxed{2 \leq a_n \leq \alpha.}$
2. Démontrer que la suite (a_n) est croissante.
3. Démontrer que la suite (a_n) converge.
4. Démontrer que la limite de la suite (a_n) est α.

1) • <u>Initialisation</u> :

on a : $2 \leq a_0 \leq \alpha$ ✓

• <u>Hérédité</u> :

$2 \leq a_n \leq \alpha$

or $a_{n+1} = f(a_n)$ et <u>f est strictement croissante</u>.

$f(2) \leq f(a_n) \leq f(\alpha)$

$$2 \leq 2{,}77 \leq a_{n+1} \leq \boxed{f(\alpha)}$$

$$\text{or } g(\alpha) = 0 \implies f(\alpha) = \alpha$$

$$2 \leq a_{n+1} \leq \alpha$$

2) $a_{n+1} - a_n$

$= f(a_n) - a_n$

$= g(a_n)$

$\geqslant 0$ sur $[2 ; \alpha]$

3) (a_n) croissante + majorée par α

4) $a_{n+1} = f(a_n)$ et f est continue sur $[2 ; \alpha]$

ℓ est solution de $f(x) = x$.

or $f(x) = x \iff g(x) = 0$

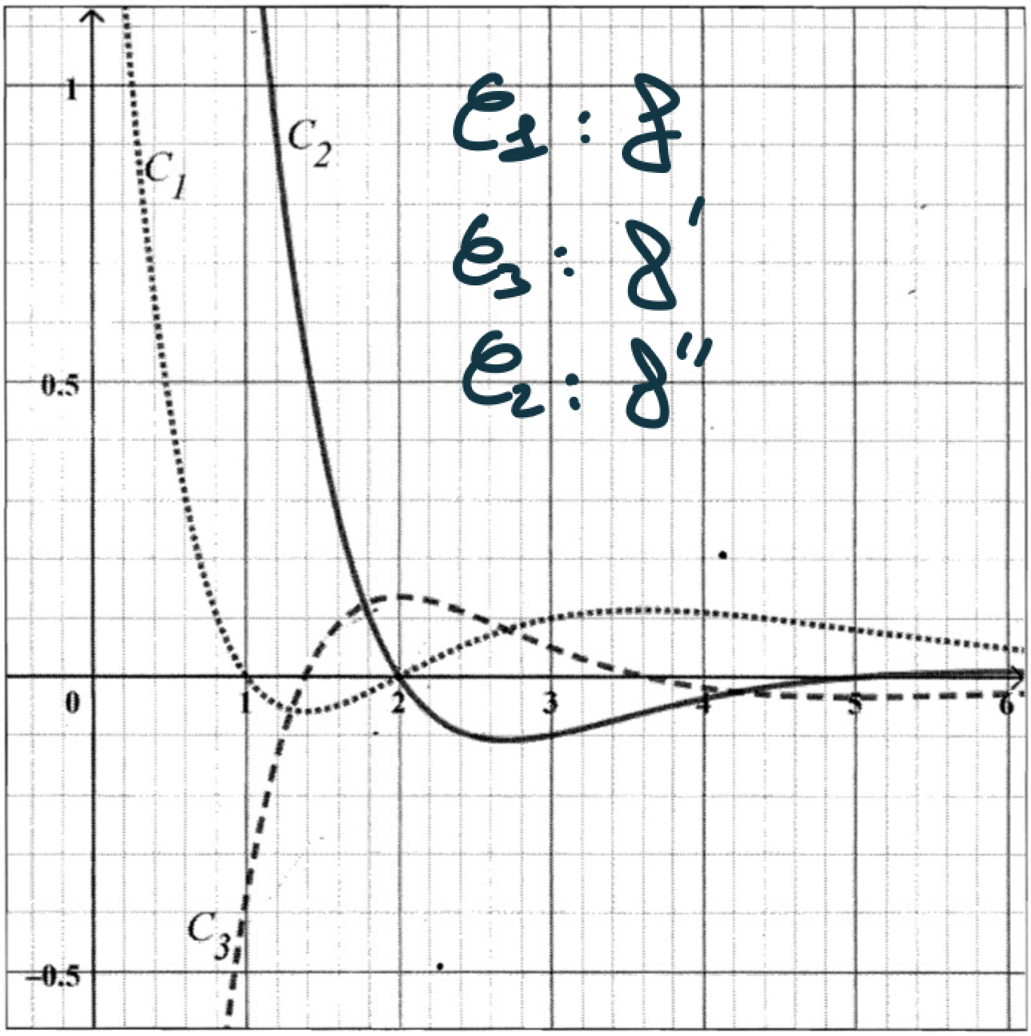
$\implies x = \alpha$

donc la limite de (a_n) est α.

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé trois courbes C_1, C_2 et C_3.

Les courbes correspondent aux représentations graphiques de trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$: une fonction f, sa dérivée f' et sa dérivée seconde f''.



$C_1 : f$

$C_3 : f'$

$C_2 : f''$

Associer chacune des fonctions f, f' et f'' à sa courbe représentative. *Aucune justification n'est attendue.*

Partie C

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 3x + 2)$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. On note I l'intégrale définie par :

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

   a. À l'aide de deux intégrations par parties successives, démontrer que $I = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

   b. Interpréter graphiquement ce résultat.

$$\int \underbrace{e^{\bullet}}_{u'} \times \underbrace{x^{n}}_{v} \, dx$$

$$\int \underbrace{\ln(\cdot)}_{v} \, \underbrace{x^{n}}_{u'} \, dx$$

$$I = \int_0^1 \underbrace{e^{-x}}_{u'} \underbrace{(x^2 - 3x + 2)}_{v} \, dx$$

$$= \left[\overbrace{-e^{-x}}^{u} \overset{v}{(x^2 - 3x + 2)} \right]_0^1$$

$$\cancel{-} \int_0^1 \cancel{-} \overset{u}{e^{-x}} \times \overset{v'}{(2x - 3)} \, dx$$

$$= -e^{-1} \times 0 + e^{0} \times 2$$

$$+ \int_0^1 e^{-x} (2x - 3) \, dx$$

$$= 2 + \left[-e^{-x} (2x - 3) \right]_0^1$$

$$\cancel{-} \int_0^1 \cancel{-} e^{-x} \times 2 \, dx$$

$$= 2 + \left(-e^{-1} \times -1 + e^{0} \times -3\right) + \int_0^1 2e^{-x}\,dx$$

$$= 2 + e^{-1} - 3 + \left[-2e^{-x}\right]_0^1$$

$$= 2 + e^{-1} - 3 - 2e^{-1} + 2.$$

$$= 1 - e^{-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{e}$$

Exercice 1 **5 points**

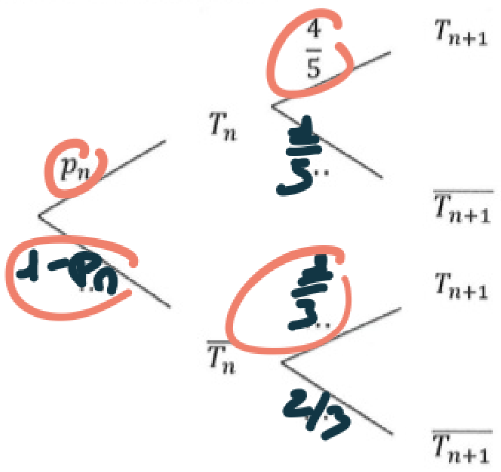
Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre.
On modélise la situation de la façon suivante :

- au premier tir, il atteint le centre de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$;
- pour les tirs suivants :
  - lorsqu'il a atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne à nouveau le centre de la cible est $\frac{4}{5}$;
  - lorsqu'il n'a pas atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne le centre de la cible est $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement T_n : « Le tireur atteint le centre de la cible au n-ième tir ».
On note $p_n = P(T_n)$ la probabilité que l'évènement T_n se réalise.

1. Donner la valeur de p_1 et montrer que $p_2 = \frac{17}{30}$.

2. Recopier sur la copie l'arbre de probabilité suivant et compléter les pointillés avec les probabilités qui conviennent :



3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}}$$

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = p_n - \frac{5}{8}$$

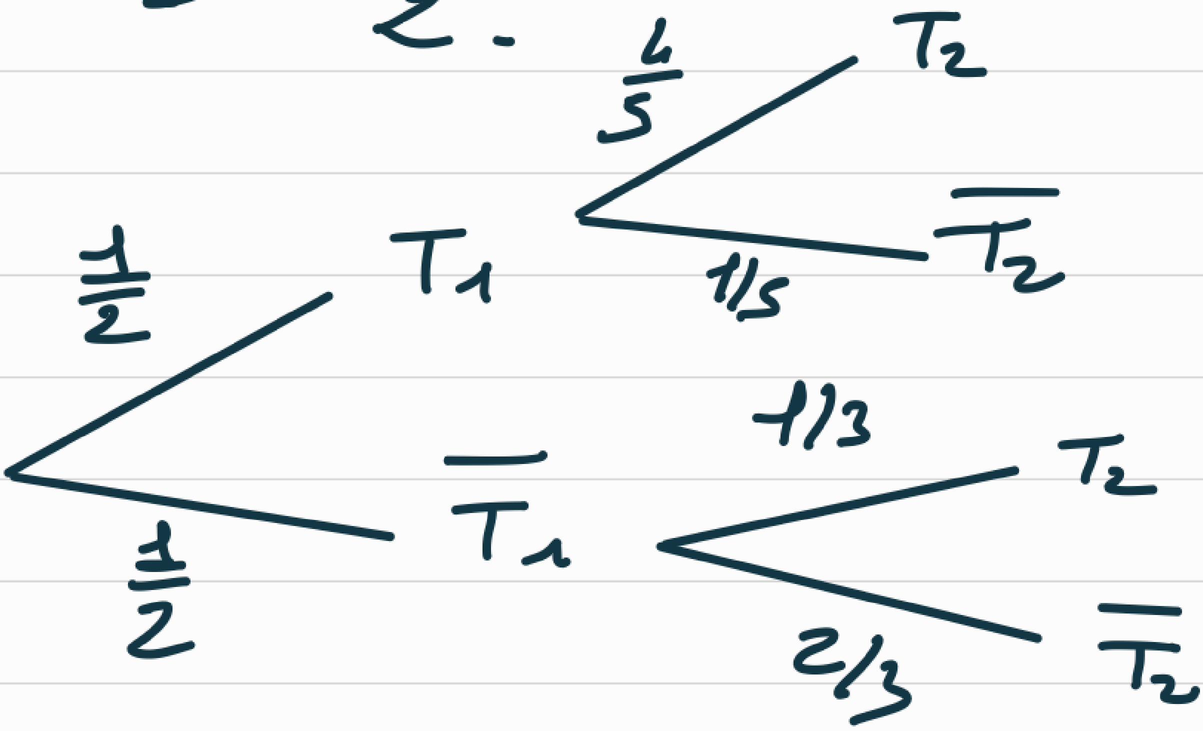
a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$.

b. Déterminer une expression de u_n en fonction de n.

c. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

5. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

1) $p_1 = \frac{1}{2}$.



D'après la formule des probabilités totales :

$$p_2 = \mathbb{P}(T_2) = \mathbb{P}(T_1 \cap T_2) + \mathbb{P}(\overline{T_1} \cap T_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{17}{30}.$$

3) D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(T_{n+1})$$

$$= \mathbb{P}(T_n \cap T_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{T_n} \cap T_{n+1})$$

$$= p_n \times \frac{4}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{4}{5} p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} p_n$$

$$= \frac{7}{15} p_n + \frac{1}{3}.$$