exercice 1 :

Partie C

1) $E[M_n]$

$= E\left[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right]$

$E[aX+b] = a\,E[X] + b$

$= \frac{1}{n} E[X_1 + \cdots + X_n]$

$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

$= \frac{1}{n}\left(E[X_1] + \cdots + E[X_n]\right).$

$$= \frac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n} \times E[X_1]$$

$$= E[X_1]$$

$$= 75 \times 0{,}108$$

$$= 8{,}1$$

$$E[M_n] = E[X]$$

$$V(M_n) = V\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)$$

$$V(aX + b) = a^2 \, V(X)$$

$$= \frac{1}{n^2} \, V(X_1 + \dots + X_n)$$

Si X et Y sont indépendants, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

$$= \frac{1}{n^2}\left(V(X_1) + \dots + V(X_n)\right)$$ car $X_1, \dots, X_n$ indép.

$$= \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \times \cancel{n} \times V(X_1)$$

$$= \frac{1}{n} \times 75 \times 0{,}108 \times (1 - 0{,}108)$$

$$= \frac{7{,}2252}{n}$$

$$\boxed{V(M_n) = \frac{V(X)}{n}}$$

2) **Bienaymé - Tchebychev :**

$$\mathbb{P}(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|M_n - \overset{E[M_n]}{8,1}| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(M_n)}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{\frac{7,2252}{n}}{4}$$

$$= \frac{1,8063}{n}$$

3) $\mathbb{P}(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq \frac{1,8063}{n}$

$\Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(|M_n - 8,1| < 2) \leq \frac{1,8063}{n}$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(|M_n - 8,1| < 2) \geq 1 - \frac{1,8063}{n}$

d'où :

$1 - \frac{1,8063}{n} \geq 0,95.$

$\Leftrightarrow \frac{1,8063}{n} \leq 1 - 0,95 = 0,05$

$\Leftrightarrow 1,8063 \leq n \times 0,05$

$$\Leftrightarrow \frac{1,8063}{0,05} \leq n$$

$$\Leftrightarrow 36,126 \leq n.$$

Donc $\boxed{n \geqslant 37}$

exercice 3 :

2) 3) $\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = AI \times AJ \times \cos(\widehat{IAJ})$

$$AI = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$AJ = \sqrt{0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos(\widehat{IAJ})$$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2}} = \cos(\widehat{IAJ})$$

$$\frac{4}{5} = \cos(\widehat{IAJ})$$

$$\Rightarrow \widehat{IAJ} = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \simeq 36{,}9°.$$

3) b). $\overrightarrow{KC}$ est normal au plan (AIJ)

d'où $x + y - \frac{1}{2} z + d = 0$

. $I(1/2, 0, 1) \in (AIJ)$

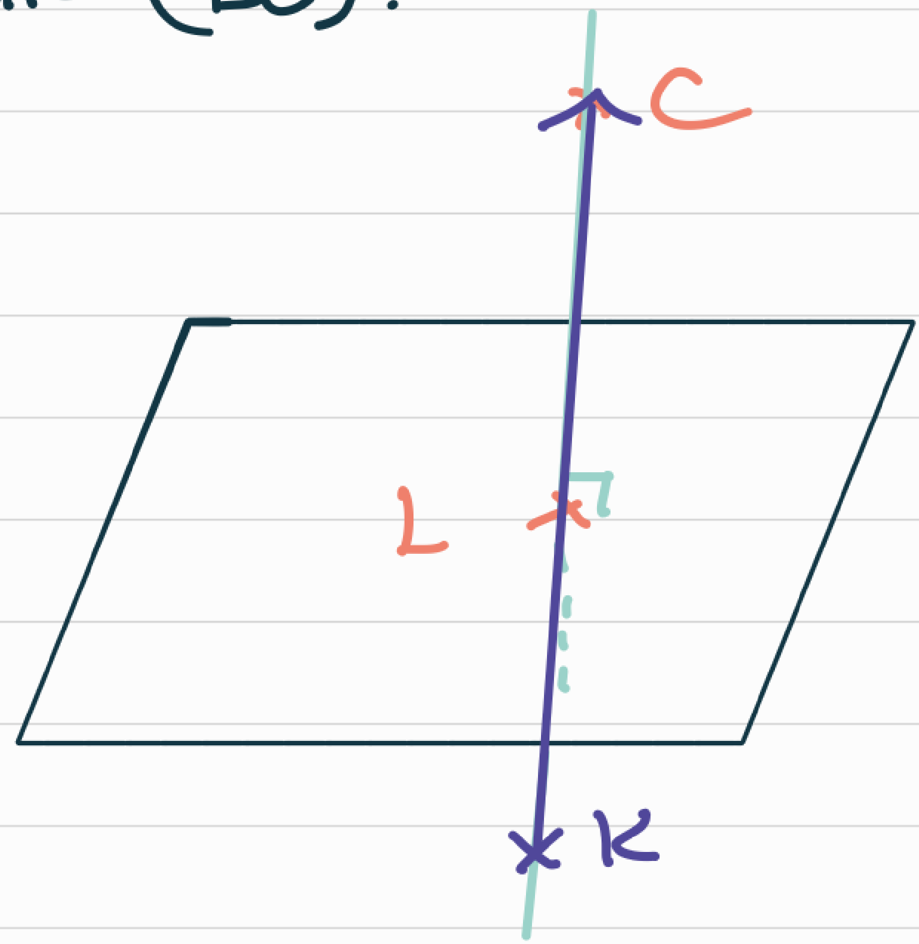
$$\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} \times 1 + d = 0$$

$\Rightarrow d = 0$

Donc une équation cartésienne du plan (AIJ) :

$$\boxed{x + y - \frac{1}{2} z = 0}$$

4) a) $\overrightarrow{KC}(1\,;1\,;-1/2)$ est normal au plan (AIJ), donc c'est un vecteur directeur de la droite (LC).



$C(1;1;0)$

$\overrightarrow{KC}$

$$(LC) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 0 - \frac{1}{2}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- $x + y - \frac{1}{2} z = 0$

$$\iff 1+t + 1+t - \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} t = 0$$

$$\iff 2 + 2t + \frac{1}{4} t = 0$$

$$\iff \boxed{2 + \frac{9}{4} t = 0}$$

$$\iff \frac{9}{4} t = -2$$

$$\iff t = \frac{-2}{\frac{9}{4}} = -\frac{8}{9}$$

- $x = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

$$y = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

$$z = -\frac{1}{2} \times \frac{-8}{9} = \frac{4}{9}$$

b) $CL = \sqrt{\left(\frac{1}{9}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{9}-1\right)^2 + \left(\frac{4}{9}-0\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{64}{81} + \frac{64}{81} + \frac{16}{81}}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{9}}$$

$$= \frac{4}{3}.$$