

Ex 4. [5.25 pts]. Pour $k \in \mathbb{R}$, on considère les matrices

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -k & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

1) a) Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on A orthogonale ?

b) Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on B orthogonale ?

c) Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on A symétrique ?

d) Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on B symétrique ?

2) On considère les deux applications $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ données par

$$f(x, y, z) = (y + x, x - z, x - y) \quad \text{et} \quad g(x, y, z) = \frac{1}{3}(2z - y + 2x, 2y + 2x - z, -x + 2z + 2y).$$

a) Est-ce que f est autoadjoint ?

b) Est-ce que f est une isométrie ?

c) Est-ce que g est autoadjoint ?

d) Est-ce que g est une isométrie ?

1) a)

$$C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C_2 \begin{pmatrix} -k \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C_1 \cdot C_3 = \frac{1}{3}(2 \times 2 + 2 \times -1 + -1 \times 2) = 0$$

$$C_1 \cdot C_2 = \frac{1}{3}(-2k + 4 - 2)$$
$$= \frac{1}{3}(-2k + 2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(-2k + 2) = 0$$

$$\Rightarrow -2k + 2 = 0$$

$$\Rightarrow k = 1$$

Avec $k = 1$:

$$\begin{aligned} C_2 \cdot C_3 &= \frac{1}{3}(-1 \times 2 - 1 \times 2 + 2 \times 2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|C_1\| &= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\|C_2\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$$

$$\|C_3\| = 1.$$

Donc A orthogonale pour $k=1$
car ses colonnes forment une base
orthonormée de \mathbb{R}^3

b) $C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\|C_1\| = \sqrt{3} \neq 1$

donc pour aucune valeur de
 k les colonnes forment une
b.o.n de \mathbb{R}^2 .

Donc il n'existe pas de valeur
de k telle que la matrice D
est orthogonale.

$$c) A = \begin{pmatrix} 2 & -k & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -k & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

en particulier $a_{13} \neq a_{31}$
 $\forall k \in \mathbb{R}$.

Donc il n'existe pas de
 valeur de k telle que $A = A^T$
 c'est à dire A soit symétrique.

$$d) B = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -k & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ k & 0 & -k \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

en particulier $b_{13} \neq b_{31}$,

donc \mathcal{B} n'est pas symétrique
pour aucune valeur de k .

2) On considère les deux applications $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ données par

$$f(x, y, z) = (y + x, x - z, x - y) \quad \text{et} \quad g(x, y, z) = \frac{1}{3}(2z - y + 2x, 2y + 2x - z, -x + 2z + 2y).$$

- a) Est-ce que f est autoadjoint ?
- b) Est-ce que f est une isométrie ?
- c) Est-ce que g est autoadjoint ?
- d) Est-ce que g est une isométrie ?

2) a) $M_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{B}$

$$M_g^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $M_g \neq M_g^T$, et

g n'est pas autoadjoint.

$$b) M_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

on remarque $\|(1,1,1)\| = \sqrt{3} \neq 1$

donc M_g n'est pas orthogonale
car ses colonnes ne forment pas
une b.o.n.

autoadjoint \Rightarrow matrice symétrique

isométrie \Rightarrow matrice orthogonale

$$c) M_g = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ = A$$

A n'est pas symétrique, donc
 g n'est pas auto-adjoint.

d) A est orthogonale pour $k=1$,
donc g est une isométrie.

Ex 3. (3.5 pts)

1) Étant donné la matrice

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

montrer que A est la matrice d'une projection orthogonale dans la base canonique.

2) On note F l'image de cette projection orthogonale. Déterminer la dimension de F , une base orthonormée de $\text{Ker}(A)$, puis un système d'équations pour F .

3) Déterminer le projeté orthogonal du point $M = (1, 2, 3, 4)$ sur F ainsi que la distance de M à F .

1) $P^2 = P$ et $P^T = P$

• $A^2 = A$ ok.

• $A^T = A$ ok

donc A est une matrice d'une projection orthogonale.

2) $F = \text{Im}(A)$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + y + z + t = 0 \\ x + 3y - z - t = 0 \\ x + -y + 3z - t = 0 \\ x - y - z + 3t = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2y + 4z + 4t = 0 \\ x + 3y - z - t = 0 \\ -4y + 4z = 0 \\ -4y + 4t = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ z = -z \\ 50 = z \Rightarrow t = z = y \\ 50 = t \end{array} \right.$$

$$\rightarrow (-z, z, z, z), z \in \mathbb{R}$$

donc $(-1; 1; 1; 1)$

donc $\ker(A) = \text{Vect} \left\{ \underbrace{(-1, 1, 1, 1)}_{\| \cdot \| = \sqrt{4} = 2} \right\}$

et une base orthonormée est

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$\bullet \dim F = \dim(\text{Im}(A))$$

$$= 4 - \dim(\ker(A))$$

$$= 4 - 1 = 3$$

• projection orthogonale

$$\text{Im}(P) = \ker(A)^\perp$$

$$\ker(P) = \text{Im}(P)^\perp$$

$$F = \text{Im}(A)$$

$$= \text{ker}(A)^\perp$$

$$= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \right.$$

$$\left. (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (-1, 1, 1, 1) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

$$3) P_F(m) = A \cdot m = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dist}_F(m) = \|m - P_F(m)\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \|(-2, 2, 2, 2)\|$$

$$= \sqrt{4+4+4+4}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$= 4$$