

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[2; +\infty[$ par $f(x) = \ln(3x^2 + 2x)$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[2; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
2. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[2; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
 - a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
 - b. Donner la valeur de α arrondie au centième.
 - c. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

$$f) \quad f'(x) = \frac{6x + 2}{3x^2 + 2x}$$

par $x > 2$, $6x + 2 > 0$

et $3x^2 + 2x > 0$

donc $f' > 0$ sur $[2; +\infty[$

et f strict. croissante sur $[2; +\infty[$.

2) a) g est continue sur $\mathbb{R}; +\infty[$

g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}; +\infty[$

$g(2) \approx 0,77 > 0$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty < 0$

donc d'après

b) $\alpha \approx 4,05$

c)

x	2	2	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

Partie B

Dans cette partie, les réponses pourront s'appuyer sur les résultats de la partie A.

On définit une suite (a_n) par son premier terme $a_0 > 0$ et pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n)$$

On étudie le cas où $2 \leq a_0 \leq \alpha$, où α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $2 \leq a_n \leq \alpha$.
2. Démontrer que la suite (a_n) est croissante.
3. Démontrer que la suite (a_n) converge.
4. Démontrer que la limite de la suite (a_n) est α .

$$\begin{aligned} 2) \quad & a_{n+1} - a_n \\ &= \ln(3a_n^2 + 2a_n) - a_n \\ &= f(a_n) - a_n \\ &= g(a_n) > 0 \quad \text{car } 2 \leq a_n \leq \alpha \end{aligned}$$

donc (a_n) est croissante.

4) $a_{n+1} = f(a_n)$ et f continue sur $]\mathbb{C}; +\infty[$.

Donc P est solution de P'
équation $f(x) = x$.

$$\alpha \quad f(x) = x$$

$$\Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 0$$

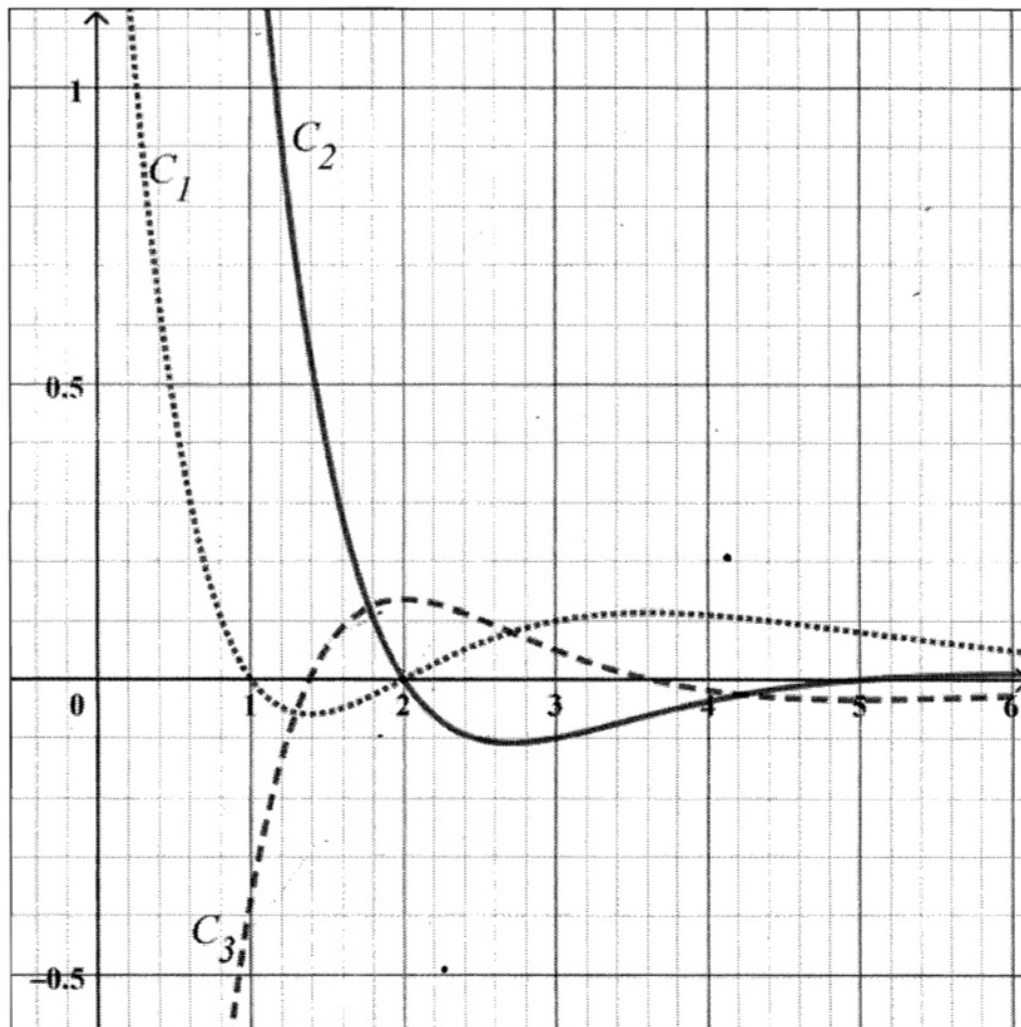
et α P' unique solution.

Donc $P = \alpha$

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé trois courbes C_1 , C_2 et C_3 .

Les courbes correspondent aux représentations graphiques de trois fonctions définies sur \mathbb{R} : une fonction f , sa dérivée f' et sa dérivée seconde f'' .



Associer chacune des fonctions f , f' et f'' à sa courbe représentative. *Aucune justification n'est attendue.*

Partie B

On considère l'équation différentielle (E) définie par $y' + y = (2x - 3)e^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x .

1. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x^2 - 3x)e^{-x}$.
Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 2$.

26-MATJ2G11

7/8

$$y' = ay \Leftrightarrow y(x) = Ce^{ax}, C \in \mathbb{R}$$

$$y' = ay + b \Leftrightarrow y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, C \in \mathbb{R}$$

$$2) y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$$

$$\text{et } y(x) = Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}.$$

$$3) y(x) = Ce^{-x} + (x^2 - 3x)e^{-x}, C \in \mathbb{R}$$

Partie C

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x}(x^2 - 3x + 2)$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier le signe de la fonction f sur \mathbb{R} .
2. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. On note I l'intégrale définie par :

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

- a. À l'aide de deux intégrations par parties successives, démontrer que $I = 1 - \frac{1}{e}$.
- b. Interpréter graphiquement ce résultat.