Exercice 3 (6 points)

Partie A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par $f(x) = \ln(3x^2 + 2x)$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

2. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[2;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
   On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

   a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2;+\infty[$.
   b. Donner la valeur de α arrondie au centième.
   c. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

2) a) • g est continue sur $[2;+\infty[$

• g est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$

• $g(2) \simeq 0{,}77 > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty < 0$

donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $[2;+\infty[$

b) $\alpha \simeq 4,05$

c)

x	2		α		$+\infty$
g		$+$	0	$-$	

Partie B

Dans cette partie, les réponses pourront s'appuyer sur les résultats de la **partie A**.

On définit une suite (a_n) par son premier terme $a_0 > 0$ et pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n) = g(a_n)$$

On étudie le cas où $2 \leq a_0 \leq \alpha$, où α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $2 \leq a_n \leq \alpha$.
2. Démontrer que la suite (a_n) est croissante.
3. Démontrer que la suite (a_n) converge.
4. Démontrer que la limite de la suite (a_n) est α.

1) $2 \leq a_n \leq \alpha$

or $a_{n+1} = g(a_n)$ et g est croissante sur $[2; +\infty[$.

$g(2) \leq g(a_n) \leq g(\alpha)$

$2,77 \leq a_{n+1} \leq \alpha$ car $g(\alpha) = 0$

$2 \leq a_{n+1} \leq \alpha$ ✓

2) $a_{n+1} - a_n$

$= f(a_n) - a_n$

$= g(a_n)$

> 0 car $\ell \leq a_n \leq \alpha$

donc (a_n) est croissante.

3) (a_n) est croissante et majorée par α, donc (a_n) converge.

4) ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$

$$f(x) = x$$

$$\Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

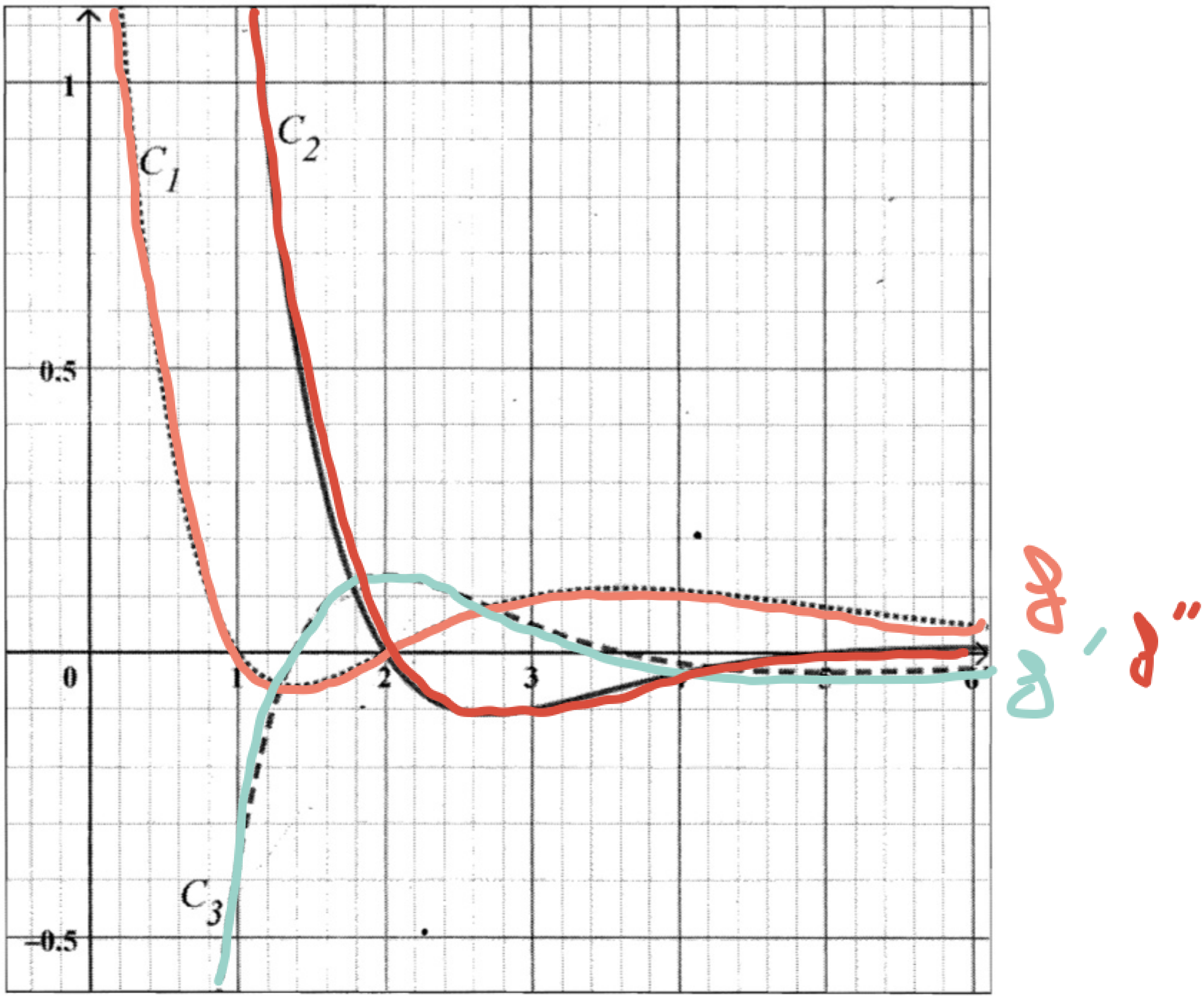
$$\Leftrightarrow g(x) = 0$$

or α est l'unique solution
donc $l = \alpha$.

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé trois courbes C_1, C_2 et C_3.

Les courbes correspondent aux représentations graphiques de trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$: une fonction f, sa dérivée f' et sa dérivée seconde f''.



Associer chacune des fonctions f, f' et f'' à sa courbe représentative. *Aucune justification n'est attendue.*

Partie B

On considère l'équation différentielle (E) définie par $y' + y = (2x - 3)e^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 3x)e^{-x}$.
   Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 2$.

2) $y' + y = 0 \iff y' = -y$

donc les solutions sont de la forme :

$$y(x) = k e^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3) les solutions sont de la forme :

$$y(x) = k e^{-x} + (x^2 - 3x) e^{-x}, k \in \mathbb{R}$$

3) $f(0) = ke^0 + 0e^0 = k$

donc $k = 2$.

et donc :

$$f(x) = 2e^{-x} + (x^2 - 3x)e^{-x}$$

Partie C

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 3x + 2)$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3x+2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3x+2 = +\infty$

$\Rightarrow$ C.C $\lim f = 0$

3. On note I l'intégrale définie par :

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

   a. À l'aide de deux intégrations par parties successives, démontrer que $I = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.
   b. Interpréter graphiquement ce résultat.

1) . $e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

. on va étudier le signe de $x^2 - 3x + 2$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	