(x_i, y_i)

Ex 4. *(2.75 pts)* On considère le nuage de points $(x_i, y_i)_{i=1}^4$ suivant : $(0, -2), (2, 0), (-3, 5), (-5, 3)$.

1) Déterminer la droite des moindres carrés associée à ce nuage de points et la dessiner sur le graphique.

2) Quelle est la définition du coefficient de détermination linéaire R^2 associé ?

3) Mettre ces points sur un dessin. On donne $R^2 \approx 0.5244$. L'approximation par une droite vous semble-t-elle raisonnable? Argumentez votre réponse.

1) • $y = \alpha_{1,*} x + \alpha_{0,*}$

$$\alpha_{1,*} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\alpha_{0,*} = \bar{y} - a\bar{x}$$

• $\bar{x} = \frac{0 + 2 - 3 - 5}{4} = -\frac{3}{2}$

$\bar{y} = \frac{-2 + 0 + 5 + 3}{4} = \frac{3}{2}$

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	produit
0	-2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{21}{4}$
2	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{21}{4}$
-3	5	$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	$-\frac{21}{4}$
-5	3	$-\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{21}{4}$

$$a_{1,*} = \frac{\boxed{-\frac{21}{4} - \frac{21}{4} - \frac{21}{4} - \frac{21}{4}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{-21}{\frac{9}{2} + \frac{49}{2}} = \frac{-21}{29}$$

$$d_{0,+} = \frac{3}{2} - \left(\frac{-21}{29}\right) \times -\frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{63}{58}$$

$$= \frac{87}{58} - \frac{63}{58}$$

$$= \frac{24}{58}$$

$$= \frac{12}{29}.$$

Donc :

$$\boxed{y = -\frac{21}{29} x + \frac{12}{29}}$$

2) $$R^2 = \frac{\mathrm{cov}^2(x,y)}{\mathrm{Var}(x)\,\mathrm{Var}(y)}$$

$$= 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$$

$\hat{y}_i$ calculé avec la droite

$$\hat{y}_1 = -\frac{21}{29} x_1 + \frac{12}{29}$$

$$= -\frac{21}{29} \times 0 + \frac{12}{29}$$

$$= \frac{12}{29}$$

$y_1 = -2$ et $\hat{y}_1 = \frac{12}{29}$.

Ex 5. *(3 pts)* Soit

$$A = \frac{1}{9}\overbrace{\begin{pmatrix} -2 & -8 & 16 \\ -8 & -14 & -8 \\ 16 & -8 & -2 \end{pmatrix}}^{M}.$$

1) Pourquoi est-ce que A admet une base orthonormée de vecteurs propres ?

2) En admettant que les valeurs propres de A sont -2 et $+2$, trouver une base orthonormée qui diagonalise A.

3) *a)* Montrer que $A^2 - 4\mathrm{I}_3 = 0$.
b) Prouver que si $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $B^2 - 4\mathrm{I}_3 = 0$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de B, alors $\lambda = \pm 2$.

- A symétrique à valeurs réelles <u>alors</u> A est diagonalisable dans une b.on de vecteurs propres.

1) On remarque que $A = A^T$. Donc A est une matrice symétrique à valeurs réelles et par le théorème spectral, A admet une bon de vecteurs propres.

2) $E_2 = \ker(A - 2I_3)$

$$= \ker\left(\frac{1}{9}M - \frac{{\times 9}\,2}{\times 9} I_3\right)$$

$$= \ker\left(\frac{1}{9}M - \frac{18}{9} I_3\right)$$

$$= \ker\left[\frac{1}{9}(M - 18 I_3)\right]$$

$$= \ker \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -20 & -8 & 16 \\ -8 & -32 & -8 \\ 16 & -8 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\sim \ker \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -2 & -8 & -2 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \ker \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -2 & -8 & -2 \\ 0 & -18 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\sim \ker \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -2 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \; L_2 - \frac{2}{5}L_1$$

$$\sim \ker \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ 0 & -\frac{36}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \ker \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \ker \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -5x - 2y + 4z = 0 \\ \quad\; -2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x - 2y - 8y = 0 \\ z = -2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5x - 10y = 0 \\ z = -2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ z = -2y \end{cases}$$

$$E_2 = \operatorname{Vect}\{(-2, 1, -2)\}.$$