Comment les maths permettent elles d'optimiser un but et un tir au hockey ?

↳ second degré

↳ angles / trigo

↳ probabilités.

⇒ 23 juin 2026.

Exercice 3 **5 points**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ de l'espace, on considère les points suivants $A(0; 0; 1)$; $B(1; 2; 3)$; $C(3; 3; 1)$; $E(2; -2; 2)$; $F(3; 0; 4)$ et $G(5; 1; 2)$.

$\vec{AF}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$

1. a. Montrer que les points B, C et E ne sont pas alignés.
   b. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{AF}$ est normal au plan (BCE).
   c. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BCE) est $\boxed{x + z - 4 = 0}$.

$\vec{AG}\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$

2. a. Montrer que le point G n'appartient pas au plan (BCE).
   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires.
   c. En déduire que la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.

Pour la suite de l'exercice, on appellera P le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BCE).

3. a. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (AG) est :

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

   b. En déduire les coordonnées du point P.
   c. Montrer que le point P est le milieu du segment [EC].

~~4. Déterminer l'intersection des plans (BCE) et (ACG).~~

1) c) $\vec{AF}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (BCE).

D'où $3x + 3z + d = 0$

or $B(1; 2; 3) \in (BCE)$

d'où : $3 \times 1 + 3 \times 3 + d = 0$

$\iff 3 + 9 + d = 0$

$\iff 12 + d = 0$

$\iff d = -12.$

donc une équation cartésienne est :

$$\boxed{3x + 3z - 12 = 0}$$

et on a en divisant par 3 :

$$\boxed{x + z - 4 = 0}$$

2) b) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AG} = 3 \times 5 + 0 \times 1 + 3 \times 1$

$$= 18 \neq 0.$$

donc $\overrightarrow{AG}$ n'est pas orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AF}$, et donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires.

c) Comme les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires, alors la droite (AG) et le plan (BCE) ne sont pas parallèles.

Donc ils sont sécants.

3) a) $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$ est directeur et $A(0,0,1) \in (AG)$.

Donc une équation paramétrique de la droite (AG) est :

$$\begin{cases} x = 0 + 5t \\ y = 0 + 1 \times t \\ z = 1 + 1 \times t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

b) • $5t + 1t - 4 = 0$

$\iff 6t - 3 = 0$

$\iff 6t = 3$

$\iff t = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

• $x = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$y = \frac{1}{2}$

$z = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

donc $P\left(\frac{5}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.

c) milieu de [EC] :

$$\left(\frac{x_E + x_C}{2} ; \frac{y_E + y_C}{2} ; \frac{z_E + z_C}{2} \right)$$

$$\left(\frac{2+3}{2} ; \frac{-2+3}{2} ; \frac{2+1}{2} \right)$$

$$\left(\frac{5}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2} \right) \Rightarrow P.$$

Partie C

Soit n un entier strictement positif désignant le nombre de compétitions durant lesquelles l'équipementier est présent.
Il apporte à chaque fois un échantillon de 75 lames. Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, que l'on considère indépendantes, donnent pour chaque échantillon le nombre de lames non conformes.
On pose $M_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.

1. Déterminer l'espérance $E(M_n)$ et la variance $V(M_n)$ de la variable aléatoire M_n.

   $= 8,1$ $= 7,2252/n$

2. Justifier l'inégalité suivante, pour tout entier naturel n non nul :

$$P(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq \frac{1,8063}{n}.$$

3. Déterminer une valeur de l'entier n à partir de laquelle $P(|M_n - 8,1| < 2) \geq 0,95$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

- $E[aX+b] = a\,E[X] + b$

  $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

- $V(aX+b) = a^2\,V(X)$

  si X et Y sont indépendantes $\Rightarrow V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Bienyamé - Tchebychev : $\forall a > 0$

$$\mathbb{P}(|X - E[X]| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

2) D'après l'inégalité de Bienyamé - Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|M_n - 8{,}1| \geq 2) \leq \frac{V(M_n)}{2^2} = \frac{\frac{7{,}2252}{n}}{4}$$

$$= \frac{1{,}8063}{n}$$

Partie B

On considère l'équation différentielle (E) définie par $y' + y = (2x-3)\mathrm{e}^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 3x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 2$.

1) vérifier : $g' + g = (2x-3)e^{-x}$

$g'(x) = (2x-3)e^{-x} + (x^2-3x)\times -e^{-x}$

$= 2xe^{-x} - 3e^{-x} - x^2e^{-x} + 3xe^{-x}$

$g'(x) + g(x) = 2xe^{-x} - 3e^{-x} - \cancel{x^2e^{-x}} + \cancel{3xe^{-x}}$
$+ \cancel{x^2e^{-x}} - \cancel{3xe^{-x}}$

$= (2x-3)e^{-x}$ ✓

2) $y' + y = 0 \iff \underbrace{y' = -y}_{\substack{y' = ay \\ \Rightarrow y(x) = Ce^{ax},\ C \in \mathbb{R}}}$

donc les solutions sont :

$y(x) = Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$

3) les solutions de (E) sont

$y(x) = Ce^{-x} + (x^2 - 3x)e^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}$

4) $f(x) = Ce^{-x} + (x^2 - 3x)e^{-x}$

et $f(0) = Ce^0 + (0^2 - 3\times 0)e^0$

$\Rightarrow \quad f(0) = C$

or $\quad f(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 2}$

donc :

$$f(x) = 2e^{-x} + (x^2 - 3x)e^{-x}$$