Exercice 1 (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère :

- les points de l'espace $A(1;0;3)$, $B(2;1;-1)$, $C(1;1;1)$ et $H(0;2;1)$;
- le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan de l'espace.

2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

4. Vérifier que le point H appartient au plan (ABC).

5. Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAH}$.

6. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (ABC) et passant par le point H.

7. Déterminer les coordonnées du point $S(x_S;y_S;z_S)$ de la droite (d) tel que :
   - la distance entre le point S et le plan (ABC) est 6 ;
   - son abscisse x_S est positive.

5) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = 9$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \underbrace{AB}_{3\sqrt{2}} \times \underbrace{AH}_{3} \times \cos(\widehat{BAH})$$

$$9 = 3\sqrt{2} \times 3 \times \cos(\widehat{BAH})$$

$$\Rightarrow \frac{9}{3\sqrt{2}\times 3} = \cos(\widehat{DAH})$$

et $\widehat{DAH} = \arccos\left(\frac{9}{3\sqrt{2}\times 3}\right)$

$= 45^\circ.$

6). $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$ directeur de (d) car (d) est orthogonale au plan (ABC)

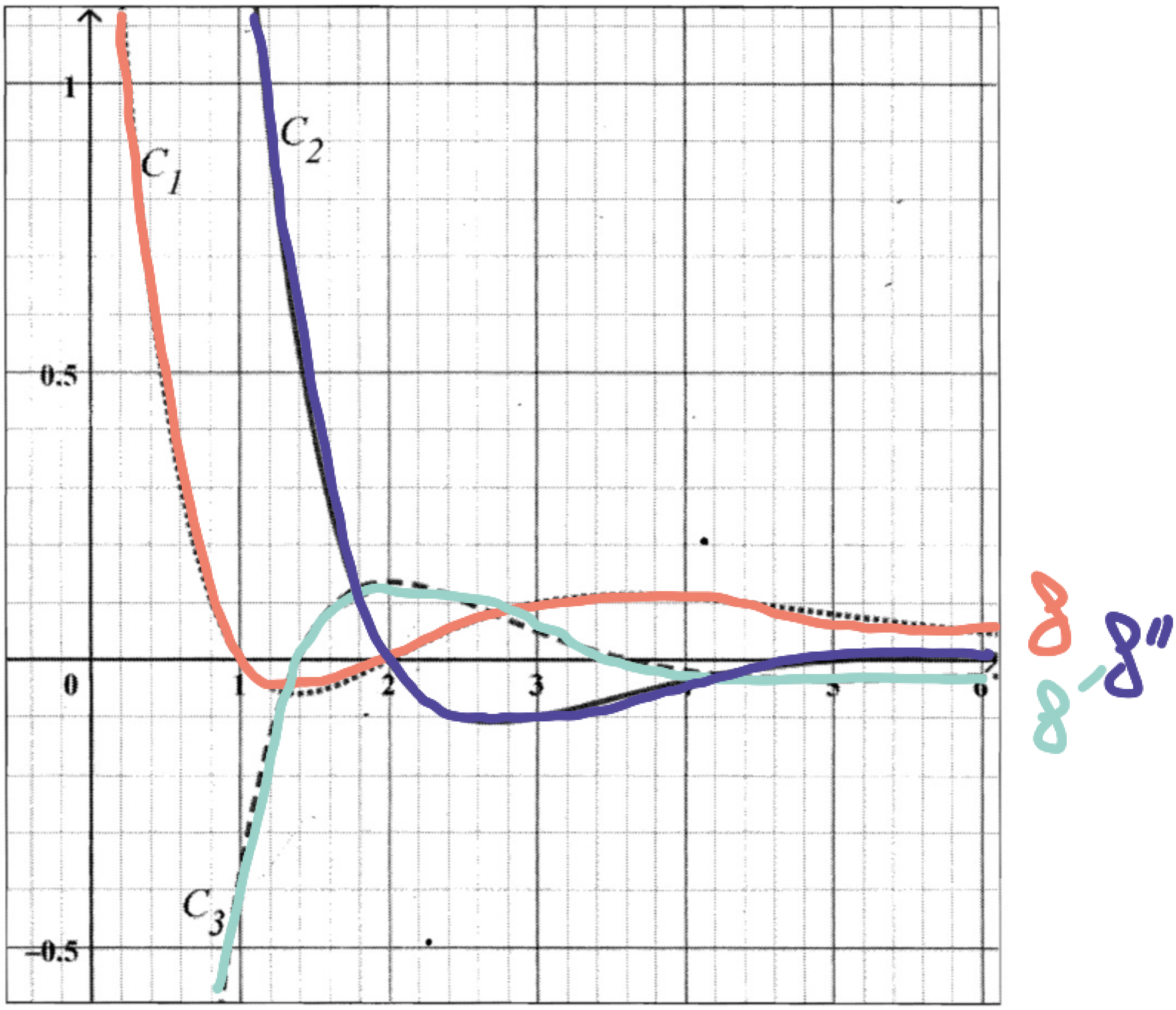
. $H(0\,;2\,;1) \in (d)$.

$$\left\{\begin{array}{rcccl} & & H & & \vec{n} \\ x & = & 0 & + & 4t \\ y & = & 2 & + & 4t \\ z & = & 1 & + & 2t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}$$

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé trois courbes C_1, C_2 et C_3.

Les courbes correspondent aux représentations graphiques de trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$: une fonction f, sa dérivée f' et sa dérivée seconde f''.



Associer chacune des fonctions f, f' et f'' à sa courbe représentative. *Aucune justification n'est attendue.*

Partie B

On considère l'équation différentielle (E) définie par $y' + y = (2x - 3)\mathrm{e}^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 3x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 2$.

1) $g'(x) = (2x-3)e^{-x} + (x^2-3x) \times -e^{-x}$

$g'(x) + g(x) = (2x-3)e^{-x} - \cancel{(x^2-3x)e^{-x}} + \cancel{(x^2-3x)e^{-x}}$

$= (2x-3)e^{-x}$

donc g est solution de (E).

2) $y' + y = 0 \iff \underbrace{y' = -y}_{\substack{y' = ax \\ \Rightarrow y(x) = Ce^{ax},\ C \in \mathbb{R}}}$

d'où les solutions sont

$$y(x) = Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3) les solutions sont

$$y(x) = Ce^{-x} + g(x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1 **5 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$.

1. Justifier tous les éléments du tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$
f	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ||

2. En déduire que pour tout $x \in [0; 1]$, on a :
$$f(x) \in [0; 1].$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n - 3}, \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. En utilisant la fonction f, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On note l la limite de la suite (u_n).
En admettant que l est solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; 1]$, montrer que $l = 1$.

4. On donne ci-dessous une fonction `seuil` écrite en langage Python.

```
def seuil(h):
    n=0
    u=0
    while u<1-h:
        n=n+1
        u=(u-2)/(2*u-3)
    return n
```

L'appel `seuil(0.0001)` renvoie la valeur 5 000.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$$