Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points

$$A(1\,;2\,;3),\ B(-1\,;3;1),\ C(2\,;1;6)\ \text{ et } D(3\,;-2\,;-1).$$

1. a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1\,;4\,;\ 1)$ est normal au plan (ABC).
   c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. a. Déterminer une équation paramétrique de la droite (d), perpendiculaire au plan (ABC) et passant par le point D.
   b. Déterminer les coordonnées du point H qui est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
   c. En déduire que la distance du point D au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{2}$.

3. a. Montrer que $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{3\sqrt{11}}{11}$.
   b. En déduire la valeur exacte de $\sin(\widehat{BAC})$.
   c. Montrer que l'aire du triangle ABC vaut $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4. Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.

   On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

   $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur qui lui est associée.

1) a) $\overrightarrow{AB}(-2\,;1\,;-2)$

$\overrightarrow{AC}(1\,;-1\,;3)$

· $\frac{-2}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{3}$

donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et les points A, B, C définissent un plan.

b) $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$

$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$

donc $\vec{n}$ est normal au plan.

c) $\vec{n}(1;4;1)$ normal à (ABC)

donc : $x + 4y + z + d = 0$

or $A(1;2;3) \in (ABC)$

$1 + 4 \times 2 + 3 + d = 0$

$\Leftrightarrow 12 + d = 0 \Rightarrow d = -12$

donc :

$$\boxed{x + 4y + z - 12 = 0}$$

2) a. (d) est perpendiculaire au plan (ABC) donc $\vec{n}(1;4;1)$ est directeur et $D(3;-2;-1) \in (d)$

$$\boxed{\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = -1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

b. $3 + t + 4(-2+4t) - 1 + t - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 3 + t - 8 + 16t - 1 + t - 12 = 0$

$\Leftrightarrow -18 + 18t = 0$

$\Leftrightarrow 18t = 18 \Leftrightarrow t = \frac{18}{18} = 1$

• $x = 3 + 1 = 4$

$y = -2 + 4 \times 1 = 2$

$z = -1 + 1 = 0$

donc $H(4 ; 2 ; 0)$.

c) $DH = \sqrt{(4-3)^2 + (2+2)^2 + (0+1)^2}$

$= \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2}$

$= \sqrt{1 + 16 + 1}$

$= \sqrt{18}$

$= 3\sqrt{2}$

3) a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -9$

$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{9} = 3$

$AC = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}$

$= \sqrt{11}$

$-9 = 3 \times \sqrt{11} \times \cos(\widehat{BAC})$

donc :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{-9}{3\sqrt{11}} = \frac{-3\sqrt{11}}{11}$$

Partie B

On considère l'équation différentielle (E) définie par $y' + y = (2x - 3)\mathrm{e}^{-x}$ où y est une fonction de la variable réelle x.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 3x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 2$.

1) $g'(x) = (2x-3)e^{-x} + (x^2-3x) \times -e^{-x}$

$= 2xe^{-x} - 3e^{-x} - x^2e^{-x} + 3xe^{-x}$

$g'(x) + g(x)$

$= 2xe^{-x} - 3e^{-x} \cancel{- x^2e^{-x}} \cancel{+ 3xe^{-x}}$

$\cancel{+ x^2e^{-x}} \cancel{- 3xe^{-x}}$

$= (2x-3)e^{-x}$

donc g est solution de (E).

2) $y' + y = 0 \iff \underbrace{y' = -y}$

$y' = ay$

$y(x) = Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

$y(x) = Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$.

3) $y(x) = Ce^{-x} + g(x)$, $C \in \mathbb{R}$

4) $f(x) = Ce^{-x} + (x^2 - 3x)e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$

$f(0) = 2$

$\iff Ce^0 + (0^2 - 3\times 0)e^0 = 2$

$\iff C = 2$

donc :

$f(x) = 2e^{-x} + (x^2 - 3x)e^{-x}$.