

## Partie C

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x}(x^2 - 3x + 2)$  et on note  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier le signe de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. a. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .  
b. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
3. On note  $I$  l'intégrale définie par :

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

- a. À l'aide de deux intégrations par parties successives, démontrer que  $I = 1 - \frac{1}{e}$ .
- b. Interpréter graphiquement ce résultat.

3) a)  $I = \int_0^1 f(x) dx$

$$= \int_0^1 \underbrace{e^{-x}}_{u'} \underbrace{(x^2 - 3x + 2)}_v dx$$

$$= \left[ -e^{-x} \times (x^2 - 3x + 2) \right]_0^1$$

$$= \int_0^1 -e^{-x} \times (2x - 3) dx$$

$$= 2 + \int_0^1 \underbrace{e^{-x}}_{u'} \underbrace{(2x-3)}_v dx$$

$$= 2 + \left[ -e^{-x} \times (2x-3) \right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} \times 2 dx$$

$$= 2 - e^{-1} \times -1 + (-3) + 2 \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$= 2 + e^{-1} - 3 + 2 \left[ -e^{-x} \right]_0^1$$

$$= 2 + e^{-1} - 3 + 2(-e^{-1} + 1)$$

$$= 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

## Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -\infty; \frac{3}{2} [$  par  $f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$ .

1. Justifier tous les éléments du tableau de variation ci-dessous.

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$\frac{3}{2}$
$f$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

2. En déduire que pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a :

$$f(x) \in [0; 1].$$

$$1) \quad \frac{x-2}{2x-3} = \frac{\cancel{x} \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\cancel{x} \left(2 - \frac{3}{x}\right)}$$

$$= \frac{1 - \frac{2}{x}}{2 - \frac{3}{x}}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{2}{x} = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \frac{3}{x} = 2$$

et par quotient  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$

---

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} 2x - 3 = 0^-$$

d'où  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \frac{1}{2x-3} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} x - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

et par produit  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = +\infty$

2)  $f$  continue sur  $[0; 1]$   
et croissante sur  $[0; 1]$

$$f(x) \in [f(0); f(1)] = \left[\frac{2}{3}; 1\right] \\ \subset [0; 1]$$

## Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -\infty; \frac{3}{2}[$  par  $f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$ .

- Justifier tous les éléments du tableau de variation ci-dessous.

$x$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$
$f$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

- En déduire que pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a :

$$f(x) \in [0; 1].$$

## Partie B

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n - 3}, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

- En utilisant la fonction  $f$ , démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  :  
 $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ .
- En déduire que la suite  $(u_n)$  converge.
- On note  $l$  la limite de la suite  $(u_n)$ .  
En admettant que  $l$  est solution de l'équation  $f(x) = x$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ , montrer que  $l = 1$ .
- On donne ci-dessous une fonction seuil écrite en langage Python.

```
def seuil(h):
    n=0
    u=0
    while u<1-h:
        n=n+1
        u=(u-2)/(2*u-3)
    return n
```

L'appel `seuil(0.0001)` renvoie la valeur 5 000.

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

$$u_{5000} \geq 1 - 0,0001 = 0,9999.$$

Conclusion: La propriété est initialisée au rang  $n=0$  et est héréditaire à partir de ce rang. Donc par le principe de récurrence  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ .

---

3)  $\frac{x-2}{2x-3} = x$

$$\Leftrightarrow x-2 = x(2x-3)$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 2x^2-3x$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2x^2-3x-x+2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x+2 = 0$$

## Partie C

On effectue le sondage décrit dans la **partie B** dans 150 villes françaises en respectant les mêmes conditions.

On note  $X_1, X_2, \dots, X_{150}$  les variables aléatoires donnant le nombre de personnes ayant déjà publié sur ce réseau social parmi les 100 personnes interrogées dans chacune des 150 villes.

On considère  $Y$  la variable aléatoire définie par

$$\underline{\mu_{150}} = Y = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{150}}{150}$$

$$E[X_i] = 41$$

$$V(X_i) = 24.19$$

$$E[Y] = 41 \quad V(Y) = \frac{24.19}{150}$$

Démontrer que la probabilité que la variable aléatoire  $Y$  soit strictement comprise entre 37 et 45 est strictement supérieure à 98 %.

$$\mathbb{P}(37 < Y < 45)$$

$$= \mathbb{P}(37 - 41 < Y - 41 < 45 - 41)$$

$$= \mathbb{P}(-4 < Y - 41 < 4)$$

$$= \mathbb{P}(|Y - 41| < 4)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(|Y - 41| > 4)$$

or d'après l'inégalité de Bienyamé - Tchebychev:

$$\mathbb{P}(|Y - 31| > 4) \leq \frac{V(Y)}{4^2}$$

$$E[\bar{X}_n] = E[X_1]$$

$$V(\bar{X}_n) = \frac{V(X_1)}{n}$$

$$= \frac{24,19}{150 \times 16}$$

$$\approx 0,01$$

D'après :

$$\mathbb{P}(37 < Y < 45)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(|Y - 31| > 4)$$

$$\geq 1 - 0,01$$

$$\approx 0,99$$