

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(1; 2; 3), B(-1; 3; 1), C(2; 1; 6) \text{ et } D(3; -2; -1).$$

1.
 - a. Montrer que les points A , B et C définissent un plan.
 - b. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; 4; 1)$ est normal au plan (ABC) .
 - c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .

2.
 - a. Déterminer une équation paramétrique de la droite (d) , perpendiculaire au plan (ABC) et passant par le point D .
 - b. Déterminer les coordonnées du point H qui est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) .
 - c. En déduire que la distance du point D au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{2}$.

3.
 - a. Montrer que $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{3\sqrt{11}}{11}$.
 - b. En déduire la valeur exacte de $\sin(\widehat{BAC})$.
 - c. Montrer que l'aire du triangle ABC vaut $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

4. Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.

On rappelle que le volume \mathcal{V} d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times B \times h, \text{ où } B \text{ est l'aire d'une base et } h \text{ la hauteur qui lui est associée.}$$

1) a) $\vec{AB}(-2; 1; -2)$

$$\vec{AC}(1; -1; 3)$$

$$\cdot \frac{-2}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{3}$$

Partie C

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x}(x^2 - 3x + 2)$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier le signe de la fonction f sur \mathbb{R} .
2. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On note I l'intégrale définie par :

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

- a. À l'aide de deux intégrations par parties successives, démontrer que $I = 1 - \frac{1}{e}$.
- b. Interpréter graphiquement ce résultat.

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

2) b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ par composition

$$x^2 - 3x + 2$$

$$= x^2 \left(1 - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2} \right)$$

$$= x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 1$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = +\infty$$

Par croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} (x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ a) } I &= \int_0^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 e^{-x} (x^2 - 3x + 2) dx \\ &= \left[-e^{-x} (x^2 - 3x + 2) \right]_0^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{-} \int_0^1 \textcircled{-} e^{-x} (2x-3) dx$$

$$= 2 + \int_0^1 e^{-x} (2x-3) dx$$

$$= 2 + \left[-e^{-x} (2x-3) \right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} \cdot 2 dx$$

$$= 2 + \left(-e^{-1} \cdot 1 - 1 - (-e^0 - 3) \right) + \int_0^1 2e^{-x} dx$$

$$= 2 + e^{-1} - 3 + \left[2x - e^{-x} \right]_0^1$$

$$= 2 + e^{-1} - 3 - 2e^{-1} - (-2e^0)$$

$$= 2 + e^{-1} - 3 - 2e^{-1} + 2$$

$$= 1 - e^{-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{e}$$

Exercice 1

5 points

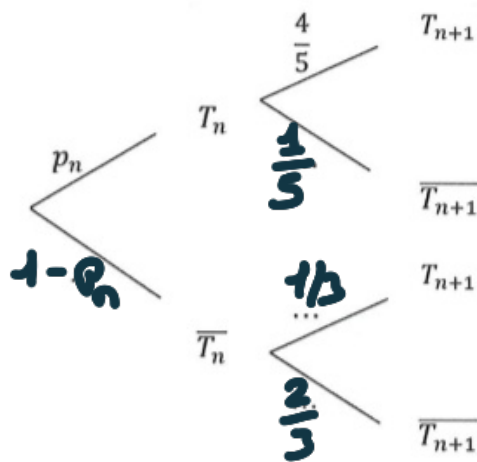
Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre. On modélise la situation de la façon suivante :

- au premier tir, il atteint le centre de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$;
- pour les tirs suivants :
 - lorsqu'il a atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne à nouveau le centre de la cible est $\frac{4}{5}$;
 - lorsqu'il n'a pas atteint le centre de la cible au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne le centre de la cible est $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'événement T_n : « Le tireur atteint le centre de la cible au n -ième tir ».

On note $p_n = P(T_n)$ la probabilité que l'évènement T_n se réalise.

1. Donner la valeur de p_1 et montrer que $p_2 = \frac{17}{30}$.
2. Recopier sur la copie l'arbre de probabilité suivant et compléter les pointillés avec les probabilités qui conviennent :



3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$p_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}$$

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = p_n - \frac{5}{8}$$

- a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$.
- b. Déterminer une expression de u_n en fonction de n .
- c. En déduire une expression de p_n en fonction de n .

$P_{im} \left(\frac{7}{15}\right)^n = 0$
 car $-1 < \frac{7}{15} < 1$

$$u_n = \frac{5}{8} + \left(-\frac{1}{8}\right) \times \left(\frac{7}{15}\right)^n$$

= 0

5. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4

5 points

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ par :

$$g(x) = x \cos(x) - \sin(x)$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ et on note g' sa dérivée.

- a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, on a $g'(x) = -x \sin(x)$.
- b. On donne le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ ci-dessous. Justifier chacun des éléments qui figurent dans ce tableau de variations.

x	0	π	2π
g	0	$-\pi$	0

(Note: The table in the image has handwritten annotations. A red 'α' is written above π, and a red '0' is written below 2π. Arrows indicate a decrease from 0 to -π and an increase from -π to 0.)

- c. Montrer qu'il existe une unique valeur réelle α dans l'intervalle $[\pi ; 2\pi]$ telle que $g(\alpha) = 0$.
- d. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; 2\pi]$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; 2\pi]$ et on note f' sa dérivée.

a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; 2\pi]$ on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

- b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $]0 ; 2\pi]$.
- c. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; 2\pi]$.
- d. Déterminer la limite de f en 0. On pourra utiliser le taux d'accroissement de la fonction en 0.

3. On considère deux nombres réels r et s qui vérifient l'inégalité : $0 < r < s < \pi$.
Montrer que :

$$\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}$$