exercice B4 :

1) on pose $f(y) = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$

. f est de classe $\mathcal{C}^1$ car f est une fonction polynomiale.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale y telle que $y(0) = y_0$.

Comme $0 \in I$, alors l'intervalle maximal contenant 0 est de la forme $I =]-\beta ; \alpha[$, $\alpha, \beta > 0$

a on veut t positifs, donc

$I \cap [0 ; +\infty[= [0, \alpha[$

avec $\alpha \in [0 ; +\infty[$ ou $\alpha = +\infty$.

2) $f(y) = 0$

$\Leftrightarrow ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) = 0$

on a $y = 0$ ou $1 - \frac{y}{K} = 0$

$y = K$

donc les points stationnaires sont 0 et K.

• Si $y_0 = 0$, alors la solution $y(t) = 0$ vérifie l'équation et $y(0) = 0$, et par unicité c'est l'unique solution.

• Si $y_0 = K$, alors la solution $y(t) = K$ vérifie et $y(0) = K$, et par unicité c'est la seule solution.

3) a) Supposons par l'absurde qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $y(t_0) \leq 0$.

Par continuité, il existe $s \in I$ tel que $y(s) = 0$.

On considère le problème de Cauchy avec $y(s) = 0$.

Or par la question 2.b. l'unique solution de ce problème de Cauchy est la solution nulle càd $y(t) = 0$ $\forall t \in I$.

Alors on a $y(0) = \underset{= y_0 > 0}{\underline{0}}$

ce qui contredit $y_0 > 0$.

Donc $\forall t \in I$, $y(t) > 0$.

b) on pose $\underline{x(t) = K - y(t)}$ $\quad y(t) = K - x(t)$

alors $x'(t) = -y'(t)$

$$= -ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

$$= -r(K-x)\underbrace{\left(1 - \frac{(K-x)}{K}\right)}_{\frac{\cancel{K} - \cancel{K} + x}{K}}$$

$$= -r(K-x) \times \frac{x}{K}$$

donc : $x' = -\frac{r}{K} x(K-x)$.

$= \underbrace{-rx\left(1-\frac{x}{K}\right)}_{\text{équation logistique}}$

$x(0) = K - y(0) = K - y_0$

or par hypothèse $y_0 < K$, donc $K - y_0 > 0$

Ainsi x vérifie une équation logistique avec $x(0) > 0$

Donc par la question précédente : $x(t) > 0, \forall t \in I$

Ainsi $x(t) = K - y(t) > 0$

donne $y(t) < K$, $\forall t \in I$

c) si $0 < y_0 < K$, par les questions précédentes on va avoir :

$$0 < y(t) < K, \forall t \in I.$$

Donc la solution est bornée, et donc il est impossible que $\lim_{t \to \alpha^-} |y(t)| = +\infty$.

Ainsi pour ne pas contredire la maximalité de la solution on doit avoir $\alpha = +\infty$.

d) $y' = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$

or $0 < y_0 < K \Rightarrow 0 < y < K$

donc $\begin{cases} ry > 0 & \text{car } r > 0, y > 0 \\ 1 - \frac{y}{K} > 0 & \text{car } y < K \end{cases}$

donc $y' > 0$ et y est croissante sur $[0; +\infty[$.

Donc y est croissante et majorée par K, donc elle converge vers $0 \leq \ell \leq K$.

De plus, ℓ vérifie l'équation :

$$0 = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

donc $P = 0$ ou $P = K$

or $y(t) \geqslant y_0 > 0$, donc

$P = K$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = K$.

4) a) $z(t) = \dfrac{1}{y(t)} - \dfrac{1}{K}$

d'où $z'(t) = -\dfrac{y'(t)}{(y(t))^2}$

or $y' = ry\left(1 - \dfrac{y}{K}\right)$

$$z'(t) = -\frac{r\cancel{y}\left(1-\frac{y}{K}\right)}{y^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{-r + r\frac{y}{K}}{y}$$

$$= -\frac{r}{y} + \frac{r}{K}$$

$$= -r\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{K}\right)$$

$$= -rz$$

donc $$\boxed{z' + rz = 0}$$

b) $z' + rz = 0$

$\Rightarrow z(t) = Ce^{-rt}, \quad C \in \mathbb{R}.$

or $z(0) = \frac{1}{y(0)} - \frac{1}{K} = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{K}$

et $z(0) = C \times e^{-r \times 0} = C$

donc $C = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{K}$, et

d'où $\boxed{z(t) = \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{K}\right)e^{-rt}}$

on a : $z(t) = \frac{1}{y(t)} - \frac{1}{K}.$

$\Leftrightarrow \quad z(t) + \frac{1}{K} = \frac{1}{y(t)}.$

donc : $$y(t) = \frac{1}{z(t) + \frac{1}{K}}$$

$$= \frac{K}{K z(t) + 1}$$

$$= \frac{K}{K\left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{K}\right)e^{-rt} + 1}$$

$$= \frac{K}{\cancel{K}\left(\frac{K - y_0}{\cancel{K} y_0}\right)e^{-rt} + 1}$$

$$= \frac{K}{1 + \left(\frac{K - y_0}{y_0}\right)e^{-rt}}.$$

exercice D.5 :

1) on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}$

et $F(t, X) = \begin{pmatrix} x' \\ (x')^2 - xy' + e^t \\ y' \\ \sin(xy) - y'x' + t^2 \end{pmatrix}$

telle que :

$$\boxed{X' = F(t, X)}$$

or F est de $\mathcal{C}^1$ en toutes ses variables.

Donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution à tout problème de Cauchy.

2) on pose $f(y,t) = |y-t| + \cos t$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad y \quad t$

- f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

- Soit $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$|f(y_1, t) - f(y_2, t)|$

$= \left|\, |y_1 - t| + \cancel{\cos}(t) - |y_2 - t| - \cancel{\cos}(t) \right|$

$= \left|\, |y_1 - t| - |y_2 - t| \,\right|$

$\left|\, |x| - |y| \,\right| \leq |x - y|$

$\leq |y_1 - t - y_2 + t|$

$\leq |y_1 - y_2|$

donc f est globalement Lipschitzienne en y.

Donc par C-L, il y a unicité des solution globales.