

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points

$$A(1; 2; 3), B(-1; 3; 1), C(2; 1; 6) \text{ et } D(3; -2; -1).$$

1.
  - a. Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  définissent un plan.
  - b. Montrer que le vecteur  $\vec{n}(1; 4; 1)$  est normal au plan  $(ABC)$ .
  - c. En déduire une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
  
2.
  - a. Déterminer une équation paramétrique de la droite  $(d)$ , perpendiculaire au plan  $(ABC)$  et passant par le point  $D$ .
  - b. Déterminer les coordonnées du point  $H$  qui est le projeté orthogonal du point  $D$  sur le plan  $(ABC)$ .
  - c. En déduire que la distance du point  $D$  au plan  $(ABC)$  est égale à  $3\sqrt{2}$ .

$$n(1; 4; 1)$$

$$L \rightarrow DH$$

- 
3.
    - a. Montrer que  $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{3\sqrt{11}}{11}$ .
    - b. En déduire la valeur exacte de  $\sin(\widehat{BAC})$ .
    - c. Montrer que l'aire du triangle  $ABC$  vaut  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .
  
  4. Déterminer le volume du tétraèdre  $ABCD$ .

On rappelle que le volume  $\mathcal{V}$  d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h, \text{ où } \mathcal{B} \text{ est l'aire d'une base et } h \text{ la hauteur qui lui est associée.}$$

$$2) \quad 3) \quad x + 4y + z - 12 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = -1 + t \end{array} \right\} , t \in \mathbb{R}.$$

---

$$\bullet \quad 3 + t + 4(-2 + 4t) - 1 + t - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + t - 8 + 16t - 1 + t - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -18 + 18t = 0$$

$$\Leftrightarrow 18t = +18$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{18}{18} = 1$$

$$\bullet \quad x = 3 + 1 = 4$$

$$y = -2 + 4 \times 1 = 2$$

$$z = -1 + 1$$

$$= 0$$

done  $H(4; 2; 0)$

$$\begin{aligned} \textcircled{E} \quad 1) H &= \sqrt{(4-3)^2 + (2-(-2))^2 + (0-(-1))^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{1 + 16 + 1} \\ &= \sqrt{18} \\ &= 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

### Partie C

On effectue le sondage décrit dans la partie B dans 150 villes françaises en respectant les mêmes conditions.  $E[X] = 41$  et  $V(X) = 24,19$

On note  $X_1, X_2, \dots, X_{150}$  les variables aléatoires donnant le nombre de personnes ayant déjà publié sur ce réseau social parmi les 100 personnes interrogées dans chacune des 150 villes.

On considère  $Y$  la variable aléatoire définie par

$$M_{150} = Y = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{150}}{150}$$

$$E[Y] = E[X] = 41$$
$$V(Y) = \frac{V(X)}{150} = \frac{24,19}{150}$$

Démontrer que la probabilité que la variable aléatoire  $Y$  soit strictement comprise entre 37 et 45 est strictement supérieure à 98 %.

$$= \mathbb{P}(37 < Y < 45)$$

$$= \mathbb{P}(37 - 41 < Y - 41 < 45 - 41)$$

$$= \mathbb{P}(-4 < Y - 41 < 4)$$

$$= \mathbb{P}(|Y - 41| < 4)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(|Y - 41| \geq 4)$$

or d'après l'inégalité de Bienyamé-Tchebychev :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|Y - 41| > 4) &\leq \frac{V(Y)}{4^2} \\ &= \frac{24,19}{15016} \\ &\approx 0,01 \end{aligned}$$

donc :

$$1 - \mathbb{P}(|Y - 41| > 4) > 1 - 0,01 \approx 0,99$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(37 < Y < 45) &> 0,99 \\ &> 0,98 \checkmark \end{aligned}$$

### Exercice 3 (6 points)

#### Partie A

On note  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[2; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(3x^2 + 2x)$ .

On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[2; +\infty[$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[2; +\infty[$ .

2. On note  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[2; +\infty[$  par  $g(x) = f(x) - x$ .

On admet que la fonction  $g$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $[2; +\infty[$  et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

- Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[2; +\infty[$ .
- Donner la valeur de  $\alpha$  arrondie au centième.
- En déduire le tableau de signes de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[2; +\infty[$ .

•  $g$  est continue sur  $[2; +\infty[$

•  $g$  est strictement décroissante sur  $[2; +\infty[$

•  $g(2) \approx 0,77 > 0$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty < 0$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs.

intermédiaires l'équation  
 $g(x) = 0$  admet une unique  
solution  $\alpha \in ]2; +\infty[$

c)

$x$	2	$\alpha$	$+\infty$
$g$	+	$\emptyset$	-

---

$a_n > n$  : récurrence

on déduit la limite de  
( $a_n$ ).

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

donc par comparaison on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

---

## Partie C

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{-x}(x^2 - 3x + 2)$  et on note  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier le signe de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. a. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .  
b. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
3. On note  $I$  l'intégrale définie par :

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

- a. À l'aide de deux intégrations par parties successives, démontrer que  $I = 1 - \frac{1}{e}$ .
- b. Interpréter graphiquement ce résultat.

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 e^{-x}(x^2 - 3x + 2) dx$$

$$= \left[ -e^{-x}(x^2 - 3x + 2) \right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}x(2x - 3) dx = 2$$

$$= 2 + \int_0^1 e^{-x} (2x - 3) dx$$

$$-e^{-1}x - 1 - (-e^0x - 3) = e^{-1} - 3$$

$$= 2 + \left[ -e^{-x} (2x - 3) \right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} 2 dx$$

$$= 2 + e^{-1} - 3 + \int_0^1 2e^{-x} dx$$

$$= 2 + e^{-1} - 3 + \left[ 2x - e^{-x} \right]_0^1$$

$$= 2 + e^{-1} - 3 - 2e^{-1} + 2$$

$$= 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

3) L'aire entre la courbe  $f$   
et l'axe des abscisses et  
les droites d'équations  $x=0$   
et  $x=1$ .