exercice 2 :

1) $F = \{ (u_n)_n : \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \}$

. $(0)_n \in F$?

Non car $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0 \neq +\infty$

donc F n'est pas un sev.

2) $F = \{ (u_n)_n : \sum u_n \text{ cv} \}$.

. $(0)_n \in F$

oui car $\sum 0 = 0$ cv.

• Soit $(u_n)_n \in F$ et $(v_n)_n \in F$

alors $\sum u_n$ cv et $\sum v_n$ cv

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{N} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=0}^{N} v_n$$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} \sum u_n + \sum v_n < +\infty$$

donc $\sum u_n + v_n$ cv,
et $(u_n + v_n)_n \in F$.

• Soit $(u_n)_n \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

alors $\sum u_n$ CV

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{N} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{N} u_n \xrightarrow[N \to +\infty]{} \lambda \sum u_n < +\infty$$

donc $\sum \lambda u_n$ cv et $(\lambda u_n)_n \in F$.

Donc F est un sev.

exercice 3 :

1) • $F + G = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^3$

• $F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$F = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

or les deux vecteurs sont non colinéaires, donc $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ forment une base de F.

$\Rightarrow \dim F = 2$

$G = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim G = 1$

donc :

$\dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

- Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G$.

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F$, ie

$$(x, y, z) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0)$$
$$= (\alpha + \beta, \beta, 0)$$

$\Rightarrow (x,y,z) \in G$, ie $(x,y,z) = \gamma(1,1,1)$
$$= (\gamma, \gamma, \gamma)$$

Alors :

$$(\alpha + \beta, \beta, 0) = (\gamma, \gamma, \gamma)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \gamma \\ \beta = \gamma \\ 0 = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

donc $(x,y,z)=(0,0,0)$

et $F\cap G=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

Donc $F\oplus G=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Eg : $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$

donc $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$
base de $\mathbb{R}^3$.

exercice 4 :

2) . $F + G = E$

Montrer que $\forall f \in E$, on a :

$$f(x) = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{i(x)}_{\in G}$$

on pose . $p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

. $i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

. $p(x) + i(x) = \dfrac{f(x) + \cancel{f(-x)}}{2} + \dfrac{f(x) - \cancel{f(-x)}}{2}$

$$= \frac{2 f(x)}{2} = f(x).$$

- $$p(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2}$$

$$= p(x)$$

donc $p \in F$

- $$i(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2}$$

$$= - \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$= - i(x)$$

donc $i \in G$.

Donc $F + G = E$.

. $F \cap G = \{0_E\}$

Soit $h \in F \cap G$

$\Rightarrow h \in F$ donc $h(-x) = h(x)$

$\Rightarrow h \in G$ donc $h(-x) = -h(x)$

donc $-2h(x) = 0$

$\Rightarrow h(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $h \equiv 0_E$

donc $F \cap G = \{0_E\}$

exercice 6 :

2) $y(x) = \boxed{\sum_{n\geq 0} a_n x^n}$.

$y'(x) = \boxed{\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}}$

$y''(x) = \boxed{\sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}}$

$\boxed{\sum_{n\geq 0} x^n} = \dfrac{1}{1-x}$

$\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$

$\dfrac{x}{(1-x)^2} = x \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \boxed{\sum_{n\geq 1} n x^n}$

$$x^2 y''(x) + x y'(x) - y(x)$$

$$=$$

$$x^2 \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$$

$$- \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$=$$

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n\geq 1} n a_n x^n - \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n\geq 0} n a_n x^n - \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left[n(n-1) a_n + n a_n - a_n \right] x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left[(n^2 - n + n - 1) a_n \right] x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left[(n^2-1)a_n\right]x^n.$$

or :

$$x^2y'' + xy' - y = \underbrace{\frac{x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}}_{\sum_{n\geq 0}(n-1)x^n}$$

donc :

$$\sum_{n\geq 0} \boxed{(n^2-1)a_n}\, x^n = \sum_{n\geq 0} \boxed{(n-1)}\, x^n$$

donc par unicité du DSE

$$(n^2-1)a_n = (n-1)$$

$$(n-1)(n+1)a_n = (n-1)$$

donc :

$$(n+1)\, a_n = 1$$

d'où

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 0}$$

3) $$y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n+1} x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{n}$$

$$= a_0 + a_1 x + \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$$

$$= a_0 + a_1 x + \frac{1}{x} x - \ln(1-x)$$

$$= 1 + Cx - \frac{\ln(1-x)}{x}$$