exercice 4 :

3) . I milieu de [BC]

$$I\left(\frac{x_B + x_C}{2} ; \frac{y_B + y_C}{2}\right)$$

$$I\left(-1 ; -\frac{3}{2}\right)$$

. I milieu de [FD]

$$I\left(\frac{x_F + x_D}{2} ; \frac{y_F + y_D}{2}\right)$$

$$I\left(\frac{x_F + 3}{2} ; \frac{y_F - 2}{2}\right)$$

- $\dfrac{x_F + 3}{2} = -1$

$\Leftrightarrow x_F + 3 = -1 \times 2 = -2$

$\Leftrightarrow x_F = -2 - 3 = -5$

- $\dfrac{y_F - 2}{2} = -\dfrac{3}{2}$

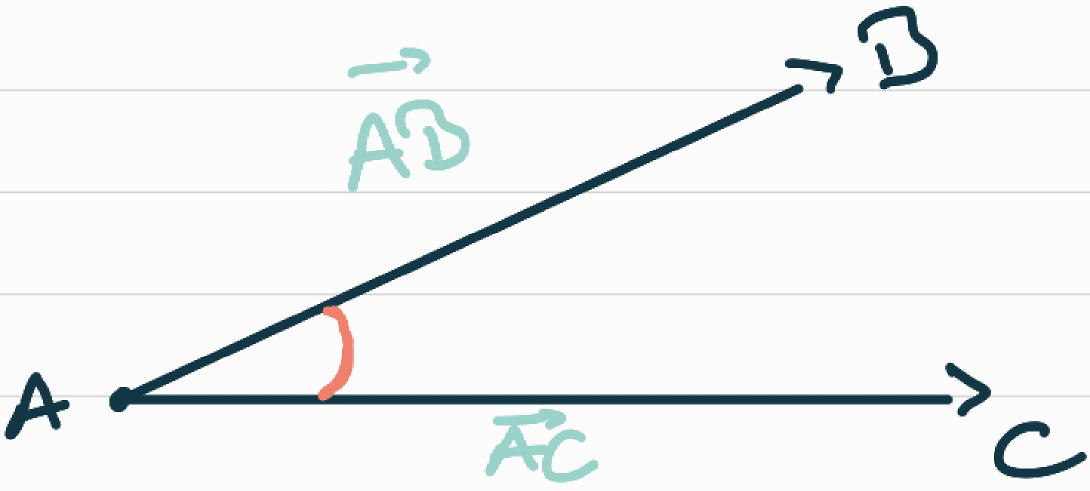
$\Leftrightarrow y_F - 2 = -3$

$\Leftrightarrow y_F = -3 + 2$

$\Leftrightarrow y_F = -1$

donc $F(-5 ; -1)$.

Produit scalaire



déf : $$\boxed{\underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}_{\text{produit de } \vec{AB} \text{ et } \vec{AC}} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})}$$

produit de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

exemple : on donne $AB = 2$ et $AC = 5$ et $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

prop : ① $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

② $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

③ $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$

④ $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2}$

identités remarquables :

① $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

② $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

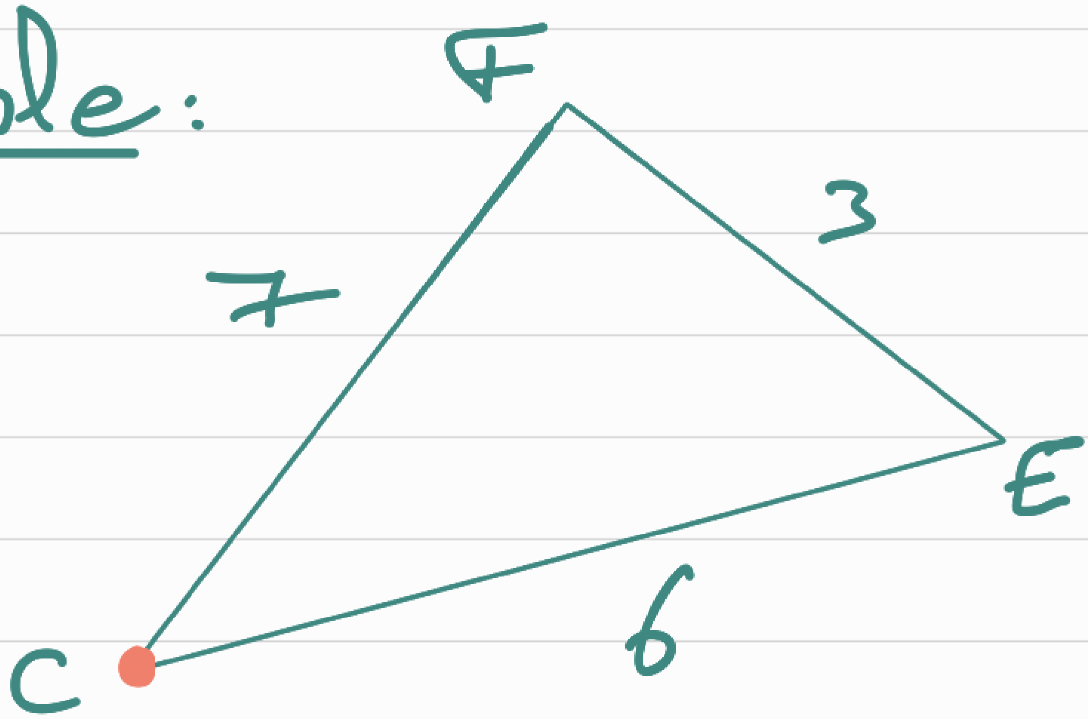
③ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

déf : $$\boxed{\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)\end{aligned}}$$

prop : A, B et C trois points

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

exemple :



Calcule de produit scalaire

$$\vec{CF} \cdot \vec{CE} = \frac{1}{2}\left(CF^2 + CE^2 - FE^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(7^2 + 6^2 - 3^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(49 + 36 - 9\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 76$$

$$= 38$$

déf : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x \times x' + y \times y'}$$

exemple :

$\vec{u}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 5\times 3 + 2\times(-1)$$

$$= 15 - 2 = 13.$$

Exercices

48 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = 3,\ \|\vec{v}\| = 5 \quad \text{et} \quad \|\vec{v}+\vec{u}\| = 4.$$

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(4^2 - 3^2 - 5^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times -18$$

$$= -9$$

47 ABC est un triangle tel que :

$$AB = 3,\ BC = 5 \text{ et } AC = 6.$$

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3^2 + 6^2 - 5^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 20$$

$$= 10$$

40 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-3\,;-1)$, $B(-2\,;1)$ et $C(2\,;0)$.

Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ **c)** $\underbrace{\overrightarrow{AB}^2}_{AB^2}$ **d)** AB

a) $\overrightarrow{AB}(1\,;2)$ $\overrightarrow{AC}(5\,;1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times5 + 2\times1 = 7$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}\cdot(-\overrightarrow{AC})$

$= -\overrightarrow{AB}\cdot AC$

$= -7$