Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que AB=5, AC =3 et $\widehat{BAC} = \frac{3\pi}{4}$.

Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$= 5 \times 3 \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 5 \times 3 \times -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\frac{15\sqrt{2}}{2}$$

$$\simeq -10,6$$

Exercice 2

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$.

Déterminer $\boxed{\|\vec{v}\|.}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$7 = 2 \times \|\vec{v}\| \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{7}{2} = \|\vec{v}\| \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\frac{7}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \|\vec{v}\|$$

$$\frac{7}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}} = \|\vec{v}\|$$

$$\frac{7}{\sqrt{3}} = \|\vec{v}\| \quad \text{donc} \quad \|\vec{v}\| \simeq 4$$

EXERCICE 2C.2

Déterminer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en utilisant la formule : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$	$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times3+(-1)\times6$ $=0$	$\vec{u}\cdot\vec{v} = 4\times3+(-1)\times(-5)$ $=12+5$ $=17$	$\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1)\times3+\frac{1}{2}\times2$ $=-3+1$ $=-2$	$\vec{u}\cdot\vec{v} = (-1)\times(-3)+0\times1$ $=3$

$\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - yx'$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

$\det(\vec{u},\vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Orthogonalité

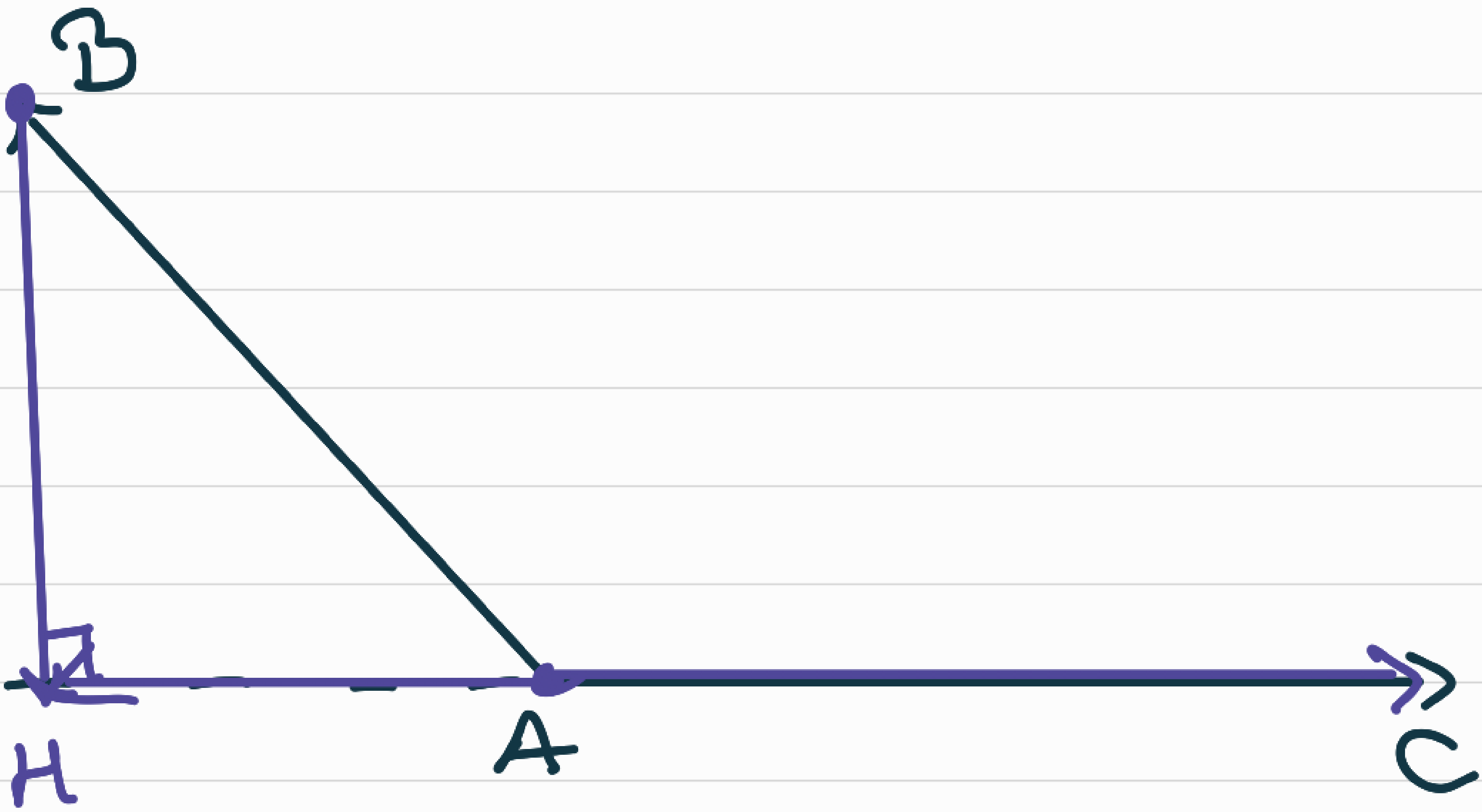
déf : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

déf : le projeté orthogonale de M sur (d).

Prop:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$$

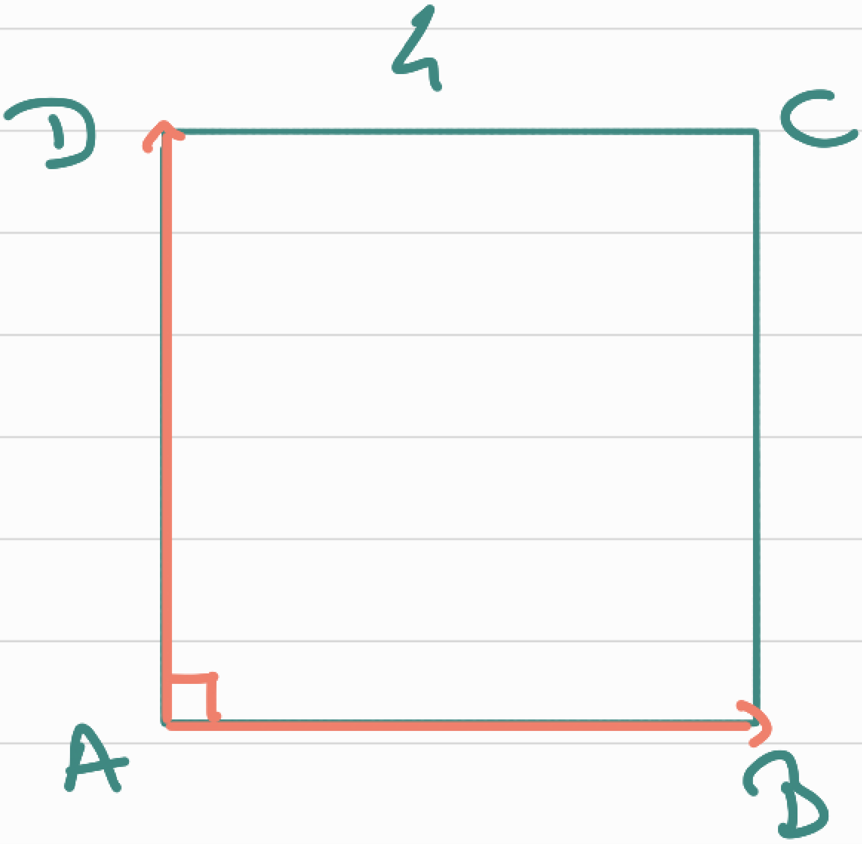
$$= AH \times AC$$



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AH} \cdot \vec{AC}$$

$$= - AH \times AC$$

exemple :



$$\cdot\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$$

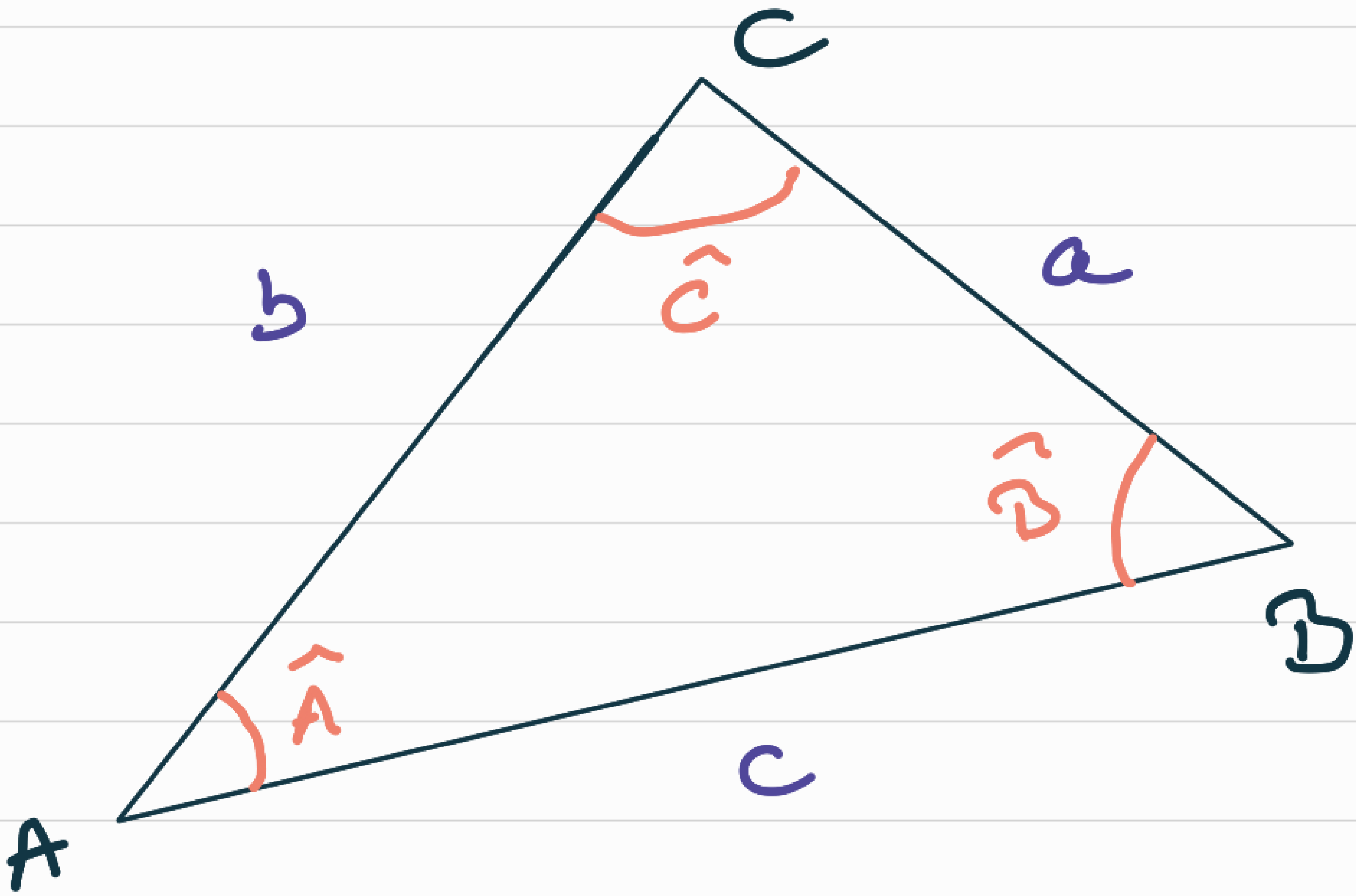
$$= AB \times AB$$

$$= 4 \times 4$$

$$= 16$$

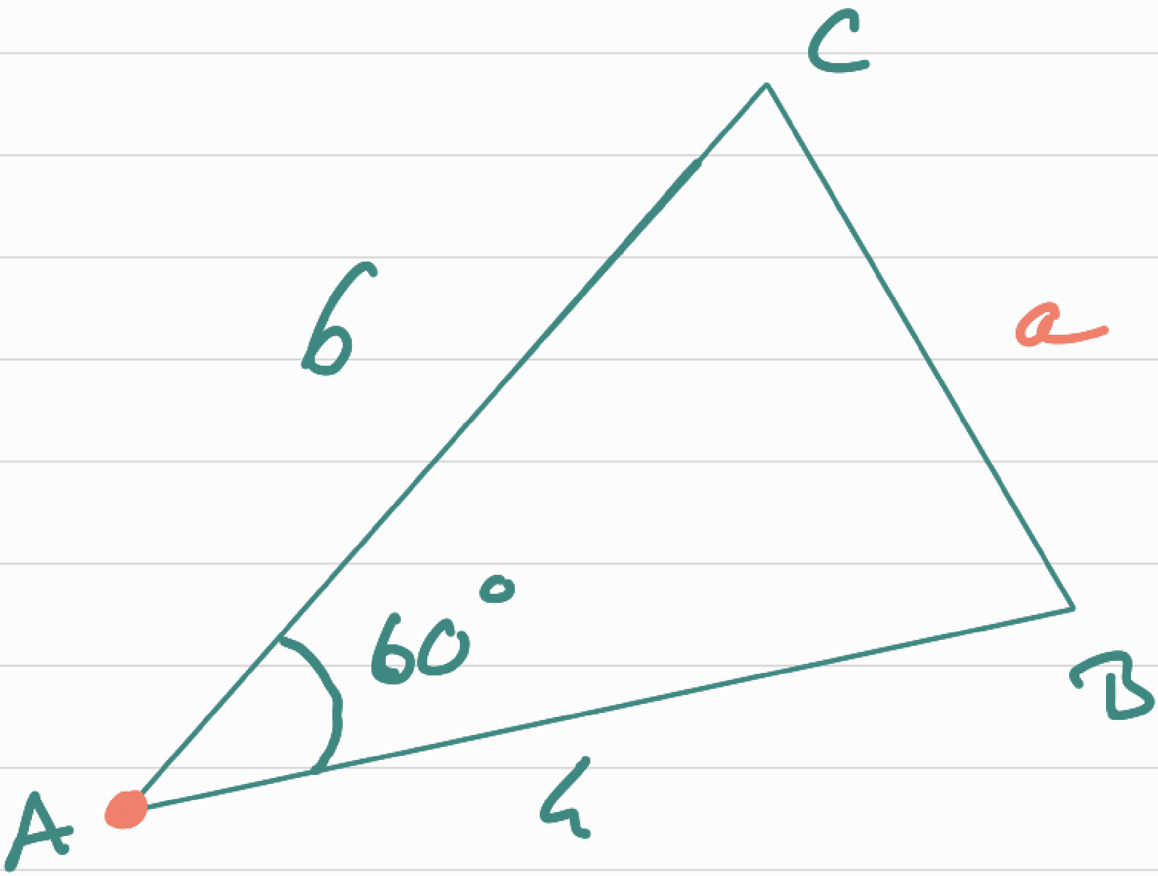
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux

- Théorème d'Al-Kashi :



- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\hat{A})$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos(\hat{B})$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos(\hat{C})$

exemple : Calcul de la longueur



Calculer la longueur BC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\hat{A})$$

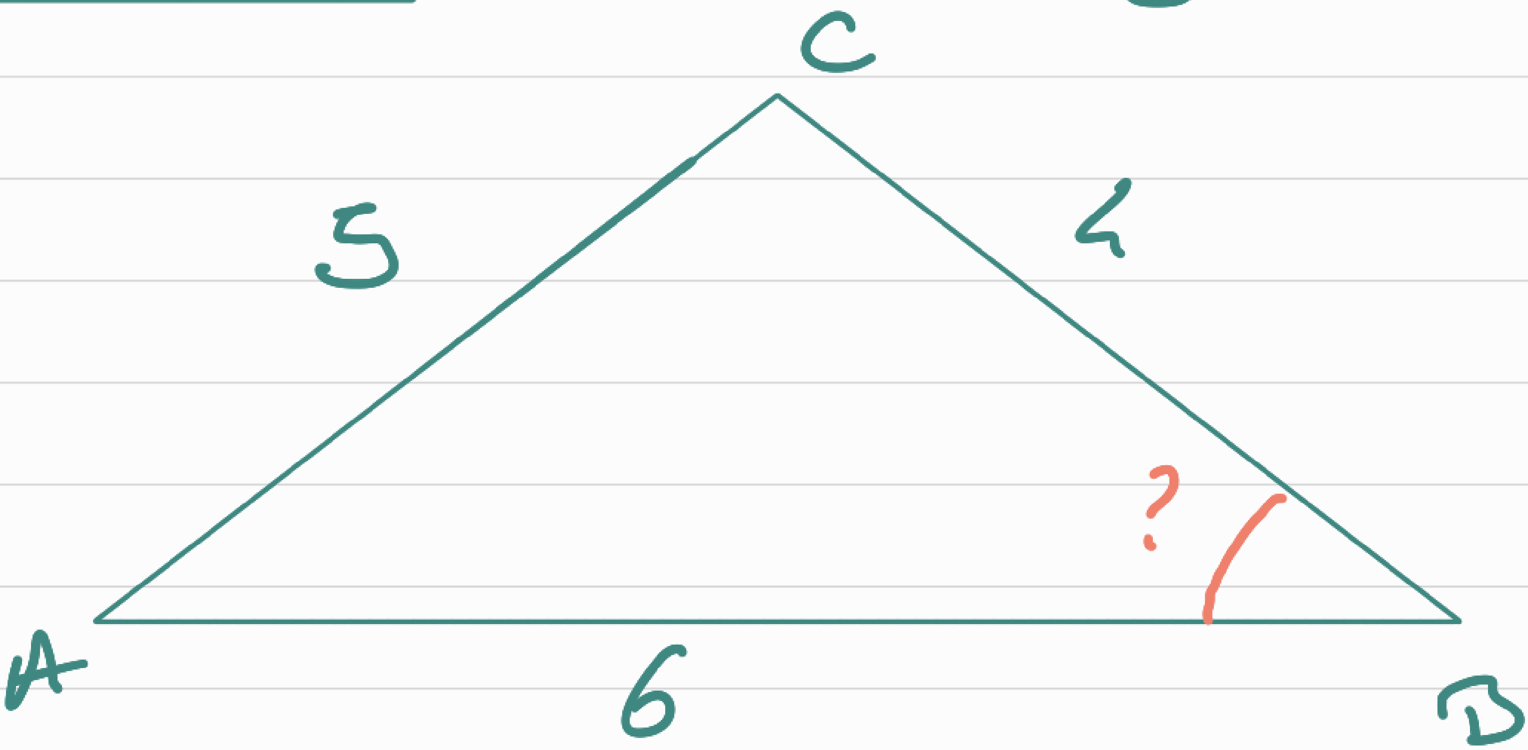
$$a^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 24 \times \cos(60°)$$

$$a^2 = 36 + 16 - 48 \times \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 52 - 24 = 28$$

donc $BC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \simeq 5$ cm

<u>exemple</u> : Calcul d'angle



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos(\widehat{B})$$

$$25 = 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos(\widehat{B})$$

$$25 = 52 - 48 \times \cos(\widehat{B})$$

$$25 - 52 = -48 \times \cos(\widehat{B})$$

$$-27 = -48 \times \cos(\widehat{B})$$

$$\frac{+27}{+48} = \cos(\widehat{B})$$

donc $\widehat{B} = \arccos\left(\frac{27}{48}\right)$

$$\simeq 56^\circ.$$