MT 24

exercice 1:

2) $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$

$\phi(1) = X \times 0 = 0 . 1$

$\phi(X) = X \times 1 = X = 1 . X$

eigenvalue: $\varphi(u) = \lambda u$

$A . u = \lambda u$

$\phi(X^2) = X \times 2X = 2X^2$

$$\phi(x^3) = x \cdot 3x^2 = 3x^3$$

$$M_\phi = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \phi(1) & \phi(x) & \phi(x^2) & \phi(x^3) \end{array} & \end{array}$$

donc $Sp = \underbrace{\{0, 1, 2, 3\}}_{\text{eigenvalues.}}$

- $E_0 = \text{Span}(1)$. $E_2 = \text{Span}(x^2)$
- $E_1 = \text{Span}(x)$. $E_3 = \text{span}(x^3)$.

4) $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)e^{-t^2}\,dt$

- comme $f,g \in \mathcal{C}([-1,1])$ et $t \mapsto e^{-t^2} \in \mathcal{C}([-1,1])$, alors l'intégrale étant sur un segment bornée, le produit scalaire est bien définie

- Soit $f,g \in \mathcal{C}([-1,1])$

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)e^{-t^2}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} g(t)f(t)e^{-t^2}\,dt$$

$$\langle g,f\rangle$$

donc c'est symétrique

. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. $f_1, f_2, g \in \mathcal{C}([-1,1])$

$\langle \lambda f_1 + \mu f_2, g \rangle$

$$= \int_{-1}^{1} (\lambda f_1 + \mu f_2)(t)\, g(t)\, e^{-t^2}\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \lambda f_1(t) g(t) e^{-t^2} + \mu f_2(t) e^{-t^2}\, dt$$

$$= \lambda \int_{-1}^{1} f_1(t) g(t) e^{-t^2}\, dt + \mu \int_{-1}^{1} f_2(t) g(t) e^{-t^2}\, dt$$

$$= \lambda \langle f_1, g \rangle + \mu \langle f_2, g \rangle$$

donc c'est linéaire à gauche et par symétrie c'est bilinéaire.

. Soit $f \in \mathcal{C}([-1,1])$

$$\langle f, f \rangle = \int_{-1}^{1} f^2(t) e^{-t^2} dt \geq 0$$

Si $f \equiv 0$, alors $\langle f, f \rangle = 0$

Si $\langle f, f \rangle = 0$, on a :

$$\int_{-1}^{1} f^2(t) e^{-t^2} dt = 0$$

or $f^2(t) e^{-t^2} \geq 0$ et on a

$t \longmapsto f^2(t) e^{-t^2} \in \mathcal{C}([-1,1])$.

donc $\int_{-1}^{1} f^2(t) e^{-t^2} dt = 0$

$\Rightarrow f^2(t) e^{-t^2} = 0, \forall t \in [-1,1]$.

or $e^{-t^2} > 0$, donc :

$$f^2(t) = 0 \quad \forall t \in [-1, 1]$$

et $f(t) = 0 \quad \forall t \in [-1,1]$.

et par continuité $f \equiv 0 \quad \forall t$

donc $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est définie posit$^{\text{ve}}$.

Final 26

exercice 5 :

$\Pi : x + y + z = 0$

$\Rightarrow P = QDQ^{-1}$

on cherche Q et D.

Q : matrice avec colonnes formant une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus \Pi^\perp$

D : matrice de la projection dans la base qui forme la matrice Q.

$\Pi^\perp$

• $\vec{n}(1,1,1)$ normal à Π.

• $\underbrace{\vec{u}(1,-1,0) \text{ et } \vec{v}(1,1,-2)}_{\Pi}$

$\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$ ✓

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ ✓

$\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$ ✓

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$$

et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ Bon de $\mathbb{R}^3$.

$$Q = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \pi^{\perp} & \quad\pi\quad & \quad\pi \end{array} \end{array}$$

et Q est orthogonal.

• Dans la base (e_1, e_2, e_3) la projection p sur π :

$$p(x) = p(\underbrace{y}_{\in \pi^{\perp}} + \underbrace{z}_{\in \pi})$$

$$= z$$

$$D = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} p(e_1) & p(e_2) & p(e_3) \end{array} & \end{array}$$

donc $P = QPQ^T$

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$