- **polynôme minimal**

- $m_A(A) = 0$ / $m_f(f) = 0$
- m_A est de degré minimal. et <u>unitaire</u>

$\forall P$ polynôme annulateur dc A on a $m_A \mid P$.

$\hookrightarrow m_A \mid P_A$

polynôme caractéristique

prop: le polynôme minimal est scindé à racines simples <u>ssi</u> la matrice est diagonalisable.

exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1 $P_A(X) = -(X+1)(X+2)(X-3)$

ici c'est le cas où le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

donc $m_A(X) = (X+1)(X+2)(X-3)$.

exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

① $P_A(X) = -(X-1)(X+2)^{2}$

?

?

$m_A(X) = (X-1)(X+2)^{2}$

$m_A(X) = (X-1)(X+2)^{1}$

② $m_A(A) = (A - I_3)(A + 2I_3)$

$= \ldots$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

donc $m_A(X) = (X-1)(X+2)$

<u>exemple</u> :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• $P_A(X) = -(X-1)^3$

? ? ?

$m_A(X) = (X-1)$

$m_A(X) = (X-1)^2$

$m_A(X) = (X-1)^3$

$$m_A(A) = (A - I_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\neq 0_{\mathcal{M}_3}$$

$$m_A(A) = (A - I_3)^2$$

$$= \dots$$

$$= 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

donc $m_A(X) = (X - 1)^2$

- **diagonalisation**

$$P_A(X) = (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X-\lambda_r)^{\alpha_r}$$

$$\underbrace{\dim(E_{\lambda_i})}_{m_g(\lambda_i)} = \underbrace{\alpha_i}_{m_a(\lambda_i)}$$

- $$\begin{cases} \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_r) = n \\ E_1 \oplus \cdots \oplus E_r = \mathbb{R}^n \end{cases}$$

- A possède n valeurs propres distinctes $\Rightarrow$ A diagonalisable

Fiche Jordan

- $P_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$

  ↪ A diagonalisable

- $P_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)^{2}$

  * si $\overbrace{m_g(\lambda_2)}^{\dim E_{\lambda_2}} = 2 = m_a(\lambda_2)$, alors A diagonalisable

  * si $m_g(\lambda_2) = 1$, alors A jordanisable avec :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- $P_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^3$

* si $m_g(\lambda_2) = 3 = m_a(\lambda_2)$, alors A diagonalisable

* si $m_g(\lambda_2) = 2$, alors A jordanisable avec :

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

* si $m_g(\lambda_2) = 1$, alors A jordanisable avec :

$$J = \boxed{\begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}$$

$m_g(\lambda)$ = nombre de blocs

$m_a(\lambda)$ = somme des tailles des blocs.

- Jordanisation

① trouver la matrice de Jordan J.

② $$J = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

Av_3

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & ? \\ \text{(connu)} & \text{(connu)} & v_3 \end{pmatrix}$$

$v_3(x, y, z)$ vérifie

$$Av_3 = v_2 + 2v_3$$

$$\iff (A - 2I_3)v_3 = v_2$$

$\Leftrightarrow$ ...

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ \end{cases}$

• Trigonalisation

① $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & ? \\ \text{connus} & \text{connus} & v_3 \end{pmatrix}$

on prend un vecteur random (souvent base canonique) tel que $\{v_1, v_2, v_3\}$ soit libre.

connus

② $A . v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$

$$\Rightarrow \quad T = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

Av_3

- **Théorème Cayley - Hamilton**

$P_A(A) = 0$

Le polynôme caractéristique de A est annulateur de A

- **Dunford**

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

telle que $DN = ND$

- $A = PJP^{-1}$

$$= P(D+N)P^{-1}$$

$$= \underbrace{PDP^{-1}}_{\text{diago}} + \underbrace{PNP^{-1}}_{\text{nilpotente}}$$