

• polynôme minimal

- $m_A(A) = 0$ / $m_f(f) = 0$
- m_A est de degré minimal et unitaire

$\forall P$ polynôme annulateur de A on a $m_A | P$.

$\hookrightarrow m_A | \underbrace{P_A}_{\text{polynôme caractéristique}}$

prop.: Le polynôme minimal est scindé à racines simples
ss: la matrice est diagonalisable.

exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{P}_A(x) = - (x+1)(x+2)(x-3)$$

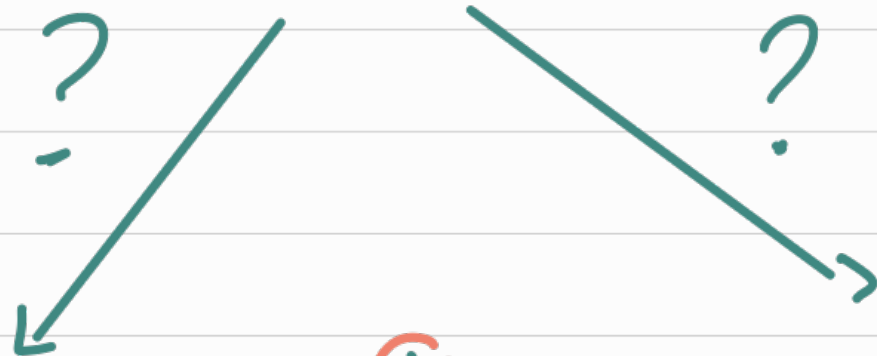
ici c'est le cas où le polynôme caractéristique est scindé en racines simples.

$$\text{donc} \quad m_A(x) = (x+1)(x+2)(x-3).$$

example :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \quad P_A(x) = -(x-1)(x+2) \textcircled{2}$$



$$m_A(x) = (x-1)(x+2) \textcircled{2}$$

$$m_A(x) = (x-1)(x+2)^1$$

$$\textcircled{2} \quad m_A(A) = (A - I_3)(A + 2I_3)$$

$$= \dots$$

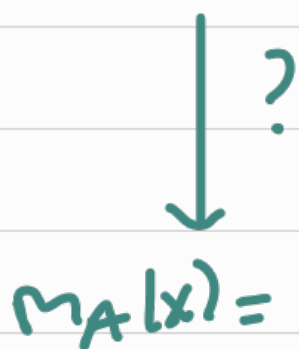
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}_{\mathbb{R}^3(\mathbb{R})}$$

donc $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)$

exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• $P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$



$$m_A(\lambda) = (\lambda - 1)$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$$

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$$

$$M_A(A) = (A - I_3)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\neq O_{\mathbb{R}^3}$$

$$M_A(A) = (A - I_3)^2$$

$$= \dots$$

$$= O_{\mathbb{R}^3(\mathbb{R})}$$

$$\text{obsc } M_A(x) = (x - 1)^2$$

• diagonalisation

$$P_A(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (x - \lambda_r)^{\alpha_r}$$

$$\underbrace{\dim(E_{\lambda_i})}_{m_g(\lambda_i)} = \underbrace{\alpha_i}_{m_a(\lambda_i)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dim(E_1) + \dots + \dim(E_r) = n \\ E_1 \oplus \dots \oplus E_r = \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

• A possède n valeurs propres distinctes $\Rightarrow A$ diagonalisable

Fiche Jordan

• $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$

↳ A diagonalisable

• $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2$

* si $\dim E_{\lambda_2} = 2 = m_a(\lambda_2)$,
alors A diagonalisable

* si $m_g(\lambda_2) = 1$, alors
 A jordanisable avec :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

• $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^3$

* si $m_g(\lambda_2) = 3 = m_a(\lambda_2)$,
alors A diagonalisable

* si $m_g(\lambda_2) = 2$, alors A
jordanisable avec :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

* si $m_g(\lambda_2) = 1$, alors A
jordanisable avec :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$m_g(\lambda) =$ nombre de blocs

$m_a(\lambda) =$ somme des tailles des blocs.

0 Jordanization

① trouver la matrice de Jordan J .

$$\textcircled{2} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & A v_3 \\ \text{Canaux} & \text{Canaux} & v_3 \end{pmatrix}$$

$v_3(x, y, z)$ vérifie

$$A v_3 = v_2 + 2 v_3$$

$$\Leftrightarrow (A - 2I_3) v_3 = v_2$$

$\Leftrightarrow \dots$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 4 \end{array} \right.$$

• trigonalisation

$$\textcircled{1} \quad P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & ? \\ \text{canon} & \text{canon} & v_3 \end{pmatrix}$$

on prend un vecteur random (souvent base canonique) tel que $\{v_1, v_2, v_3\}$ soit libre.

$$\textcircled{2} \quad A \cdot v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$

connoit

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix}$$

$A v_3$

• Théorème Cayley - Hamilton

$$P_A(A) = 0$$

↳ polynôme caractéristique de A est annulateur de A

• Dunford

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_I + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_N$$

telde que $DN = ND$

$$\bullet A = PJP^{-1}$$

$$= P(D+N)P^{-1}$$

$$= \underbrace{PDP^{-1}}_{\text{diago}} + \underbrace{PNP^{-1}}_{\text{n. perturbate.}}$$