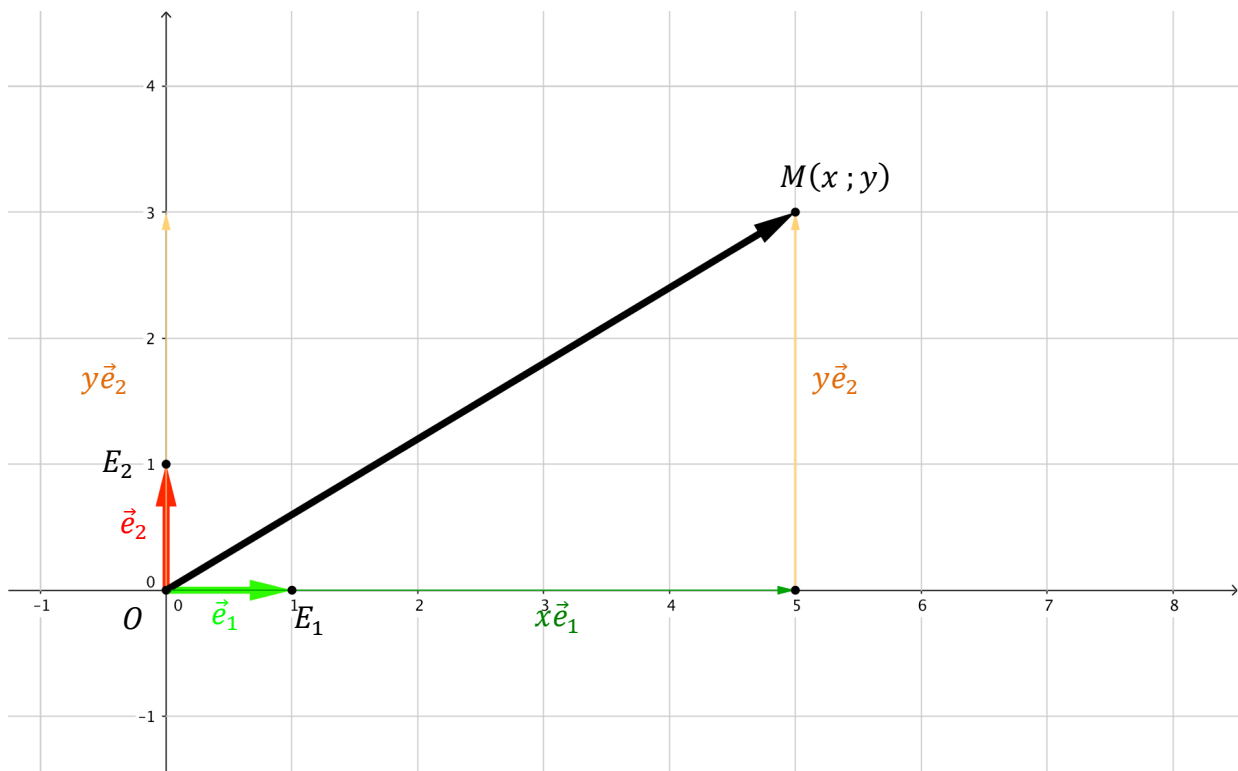


Géométrie analytique

Chapitre 1 – Equation de la droite dans le plan

1.1 Rappels

Dans ce chapitre, nous supposons que le plan est muni d'un repère $(O ; E_1 ; E_2)$:



Nous avons l'équivalence $M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Deux vecteurs non nuls sont dits **colinéaires** si l'un est le produit de l'autre par un nombre :

$$\vec{a} \text{ est colinéaire à } \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$$

Remarques

1. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
2. Deux vecteurs non nuls colinéaires sont de même direction.
3. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs composantes sont proportionnelles :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ est colinéaire à } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow ad = bc$$

Considérons une droite d de direction $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$. Si d_1 est non nul (donc si d

n'a pas la direction de Oy), on appelle **pente** de d le quotient

$$m = \frac{d_2}{d_1}.$$

1.2 Equation cartésienne de la droite dans le plan

L'équation cartésienne d'une courbe est une condition nécessaire et suffisante sur les coordonnées $(x; y)$ d'un point M pour que ce point appartienne à la courbe.

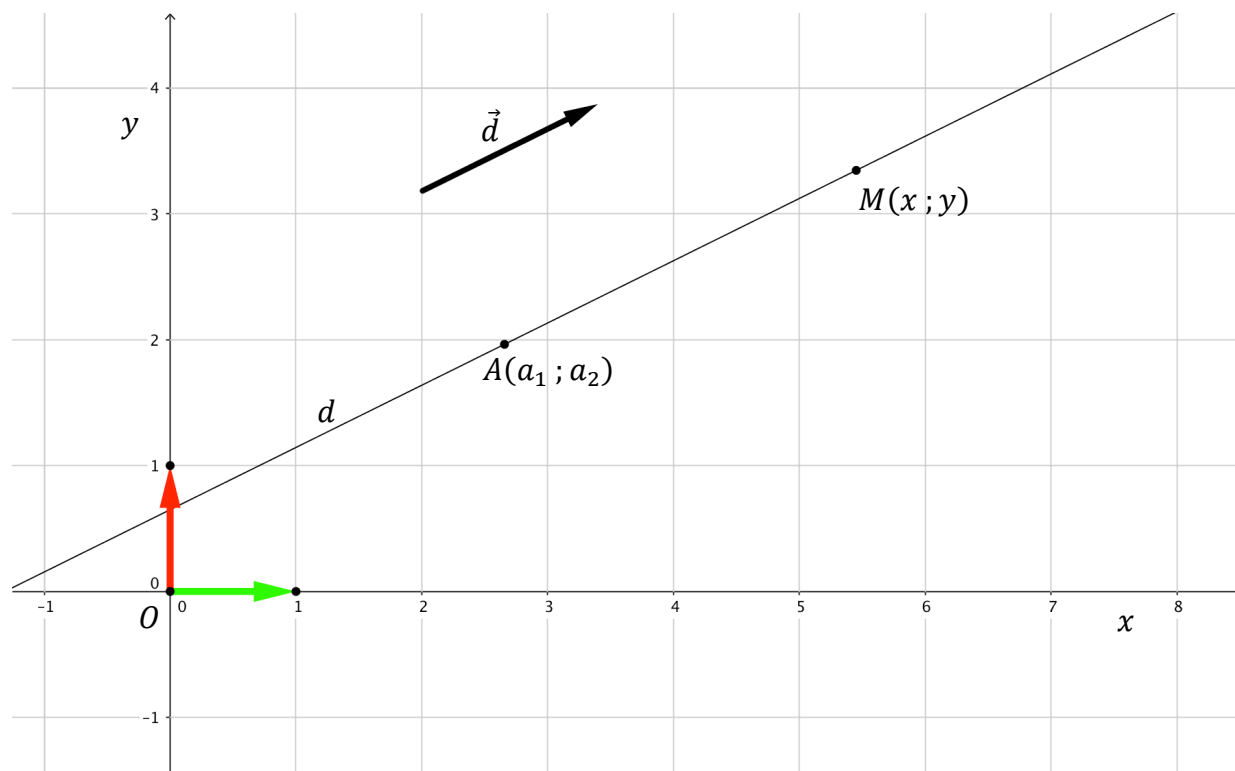
Par exemple, l'équation cartésienne du graphe d'une fonction f est $y = f(x)$.

Nous allons prouver que l'équation cartésienne d'une droite est une équation du premier degré à une ou deux inconnues.

1.2.1 Equation cartésienne d'une droite donnée par un point et une direction

Considérons la droite d donnée par le point $A(a_1; a_2)$ et le vecteur directeur

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} :$$



Le point $M(x; y)$ appartient à d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires.

Comme $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x - a_1 \\ y - a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, une condition nécessaire et suffisante pour que M appartienne à d est

$$(x - a_1)d_2 = (y - a_2)d_1$$

Equation cartésienne de d

Cas particuliers

1. Si d est parallèle à Ox , on peut prendre $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc l'équation cartésienne de d est

$$y - a_2 = 0$$

2. Si d est parallèle à Oy , on peut prendre $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc l'équation cartésienne de d est

$$x - a_1 = 0$$

1.2.2 Equation cartésienne d'une droite donnée par un point et sa pente

Considérons la droite de pente m et passant par le point $A(a_1; a_2)$. Elle a pour vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$, donc son équation cartésienne est :

$$y - a_2 = m(x - a_1)$$

Cas particuliers

Si le point A est l'intersection de la droite avec $Oy : A(0; h)$, l'équation de la droite peut s'écrire sous la forme

$$y = mx + h$$

Le nombre h s'appelle **ordonnée à l'origine** de d , et l'équation ci-dessus est l'**équation explicite** de la droite.

1.2.3 Forme générale de l'équation d'une droite

Nous venons de voir que l'équation d'une droite pouvait s'écrire sous la forme $ax + by + c = 0$, où a et b ne sont pas tous les deux nuls, Montrons que , réciproquement, toute équation de cette forme est l'équation d'une droite.

Théorème 1.1

Si les coefficients a et b ne sont pas tous les deux nuls, l'équation $ax + by + c = 0$ est l'équation cartésienne d'une droite. On l'appelle **forme générale** de l'équation d'une droite.

Preuve

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points vérifiant $ax + by + c = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} ax_A + by_A + c = 0 \\ ax_B + by_B + c = 0 \end{cases}$$

Il suffit de prouver que la direction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est indépendante du choix des points A et B .

Par soustraction, on tire du système ci-dessus :

$$\begin{cases} ax_A + by_A + c = 0 \\ ax_B + by_B + c = 0 \end{cases} \quad L_2 - L_1 \quad \begin{cases} a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) = 0 \\ ax_B + by_B + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x_B - x_A) = -b(y_B - y_A) \\ ax_B + by_B + c = 0 \end{cases}$$

et $a(x_B - x_A) = -b(y_B - y_A)$ montre que le vecteur $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ est colinéaire

au vecteur $\vec{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, donc que la direction de $\overrightarrow{AB}$ est indépendante du choix des points A et B vérifiant l'équation.

#

Corollaire 1.1

La droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour direction le vecteur $\vec{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et, si $b \neq 0$, pour pente $-\frac{a}{b}$.

Corollaire 1.2

Quel que soit le réel k , la droite d'équation $ax + by = k$ a la même direction que la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Exercices

Exercice 1.1.

Les points suivants appartiennent-ils à la droite d'équation cartésienne $3x - 8y + 2 = 0$: $(0; \frac{1}{4})$, $(-\frac{2}{3}; 0)$, $(5; -1)$, $(2; 1)$, $(-1; 7)$?

Exercice 1.2.

Représenter dans un système d'axes les droites données par leurs équations cartésiennes :

a) $2x - 3y + 6 = 0$

c) $7x + 3y = 0$

e) $-3y + 9 = 0$

g) $-5y = 0$

b) $5x + 3y - 15 = 0$

d) $2x + 5 = 0$

f) $2x = 0$

horizontale

$\rightarrow y = 0$ axe abscisses

verticale

$\rightarrow x = 0$ axe des ordonnées

Exercice 1.3.

Déterminer l'équation cartésienne et la pente de la droite donnée par :

- a) $A(-5; 4)$ et un vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- b) $A(5; -1)$ et un vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix}$
- c) $A\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ et un vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
- d) $A(7; 2)$ et $B(-5; 8)$
- e) $A(1; 1)$ et $B\left(-5; \frac{3}{4}\right)$
- f) $A(3; -7)$, de pente $-\frac{1}{5}$
- g) $A(1; 1)$, de pente $\frac{3}{4}$
- h) $A(-7; 8)$, de vecteur directeur $\vec{e}_1$
- i) $A(4; 5)$, parallèle à Oy

$\hookrightarrow \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 1.4.

On donne la droite d'équation cartésienne $-3x + 2y - 6 = 0$. Calculer les coordonnées du point de cette droite :

- a) d'abscisse 3 $\rightarrow$ remplace x
- b) d'ordonnée -4 $\rightarrow$ remplace y
- c) dont les deux coordonnées sont égales $(x; x)$ remplace y par x
- d) situé sur Ox $\rightarrow y = 0$
- e) situé sur Oy $\rightarrow x = 0$
- f) situé sur la droite d'équation cartésienne $5x - 7y + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} -3x + 2y - 6 = 0 \\ 5x - 7y + 4 = 0 \end{cases}$

Exercice 1.5.

Calculer la pente de la droite d'équation $5x + 7y - 21 = 0$.

$m = -\frac{a}{b}$

Exercice 1.6.

Calculer l'ordonnée à l'origine de la droite d'équation $5x - 8y + 56 = 0$.

$$x = 0$$

Exercice 1.7.

Déterminer un vecteur directeur de la droite d'équation $5x + 7y - 21 = 0$.

$$(-b; a)$$

Exercice 1.8.

Calculer la pente de la droite d'équation $y - 2 = m(x + 3)$, sachant que la droite passe par $B(6; 4)$.

$$x = 6 \text{ et } y = 4$$

Exercice 1.9.

Calculer a , sachant que $(d): ax + 3y - 16 = 0$ passe par $P(2; 12)$.

$$\underline{x} \quad \underline{y}$$

Exercice 1.10.

Calculer les coordonnées du point d'ordonnée nulle de $(d): 7x + 3y = -21$.

$$y = 0$$

Exercice 1.11.

Calculer les coordonnées d'un point de la droite $(d): 6x - 12y = 48$.

$$x - 2y = 8 \quad \div 6$$

Exercice 1.12.

Calculer la pente de la droite passant $A(5; 7)$ par et $B(8; -3)$.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exercice 1.13.

On donne la droite $(a) : 3x - 2y + 5 = 0$.

- Calculer les coordonnées du point A de a dont l'abscisse vaut 1.
- Etablir l'équation de la droite d passant par A et dont la pente vaut le double de celle de a .
- Etablir l'équation de la parallèle b à a passant par $B(2; 4)$.
- Calculer les coordonnées du point d'intersection de b et de d .

Exercice 1.14.

Etablir les équations des côtés et des médianes du triangle dont les sommets sont $A(3; -2)$, $B(-3; 2)$ et $C(0; -1)$.

Exercice 1.15.

On donne les points $A(-5; -2)$, $B(-2; 2)$ et la droite $(d) : x + y = 14$. La droite d coupe la droite AB en M . Calculer le rapport de section $(AB; M)$.

Exercice 1.16.

On donne les équations des diagonales d'un parallélogramme $ABCD$:

$(AC) : y = x - 1$, $(BD) : 5x + y - 29 = 0$. Calculer les coordonnées des sommets du parallélogramme sachant que A et B se trouvent sur la droite $(d) : x + 2y - 4 = 0$.

Exercice 1.17.

Deux droites d et d' sont données par leurs équations. Déterminer si elles sont sécantes, parallèles ou confondues et, selon les cas, leur point commun ou leur pente commune :

a) $(d) : 3x - 5y + 7 = 0$

$(d') : 2x - 4y - 8 = 0$

b) $(d) : -4x + 20y + 36 = 0$

$(d') : x - 5y = 9$

c) $(d) : -7x - 8y + 2 = 0$

$(d') : 4x - 3y + 4 = 0$

d) $(d) : 8x - 2y + 36 = 0$

$(d') : y = 4x + 25$

Exercice 1.18.

Déterminer, dans chacun des cas, l'équation de la parallèle à la droite d passant par A :

a) $(d) : 7x - 6y = 7$

$A(1; 1)$

b) $(d) : 5x = 5 - 2y$

$A(-2; -1)$

c) $(d) : y = 9 - 7x$

$A(2; -2)$

Exercice 1.19.

Prouver que les quatre droites $(a) : 2x + y = 3$, $(b) : x = 3y - 1$, $(c) : 3x + 5y - 7 = 0$ et $(d) : 4x - 5y = 1$ sont concourantes en un point.

Exercice 1.20.

Sachant que $M_1(2; 1)$, $M_2(5; 3)$ et $M_3(3; -4)$ sont les coordonnées des milieux des côtés d'un triangle, établir les équations des côtés de ce triangle.

Exercice 1.21.

On considère un triangle ABC ainsi que deux points M et N définis par les rapports de sections $(AB;M) = -1$ et $(AC;N) = -3$. Soit P l'intersection des droites MN et BC . Prouver que N est le milieu de $[MP]$.

Exercice 1.22.

On considère les droites $(d_1) : (a-1)x + (3a-1)y + (4a-4) = 0$ et $(d_2) : (2a-2)x + (2a-1)y + (4a-7) = 0$. Existe-t-il des valeurs de a telles que d_1 et d_2 soient parallèles ou confondues ?

Exercice 1.23.

Déterminer l'équation de la parallèle à $(d) : 2x - 2 = \frac{y-1}{3}$ passant par $P(1;2)$.

Exercice 1.24.

- Déterminer l'équation de la parallèle à Oy passant par $P(3;2)$.
- Déterminer l'équation de la droite d passant par P et par le milieu du segment d'extrémités $A(8;2)$ et $B(-1;5)$.

$$I \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Exercice 1.25.

Pour quelles valeurs de m et de n les droites $(a) : nx + 8y + m = 0$ et $(b) : 2x + ny - 1 = 0$ sont-elles confondues ?

Exercice 1.26.

On donne les équations de deux côtés d'un parallélogramme : $4x + y + 11 = 0$ et $10x - 3y = 33$, ainsi que celle d'une diagonale : $7x - 3y - 24 = 0$. Calculer les coordonnées des sommets du parallélogramme.

Exercice 1.27.

Soit k un nombre réel quelconque, et $A(1; 2 - 2k)$, $B(4; 2 + k)$. Prouver que la droite AB passe par un point fixe quelle que soit la valeur de k .

Chapitre 2 – La droite dans le plan

métrique

Dans ce chapitre, nous supposerons que les bases et les repères sont orthonormés.

2.1 Rappels

1. Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Le **produit scalaire** de ces vecteurs est le nombre $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.
2. Deux vecteurs non nuls sont perpendiculaires ou orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
En particulier, si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ est non nul, tout vecteur orthogonal à $\vec{a}$ est un multiple du vecteur $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.
3. La norme du vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ est $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
4. Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ est non nul, le vecteur $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ est le vecteur unitaire de même direction et de même sens que $\vec{a}$.
5. Soit $\vec{a}$ un vecteur non nul et $\vec{b}$ un vecteur quelconque. La projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$ est le vecteur $proj_{\vec{a}}(\vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$. Ainsi :
$$\|proj_{\vec{a}}(\vec{b})\| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\|}.$$

2.2 Généralités

On appelle **angle directeur** d'une droite d tout angle entre $\vec{e}_1$ et un vecteur directeur de d .

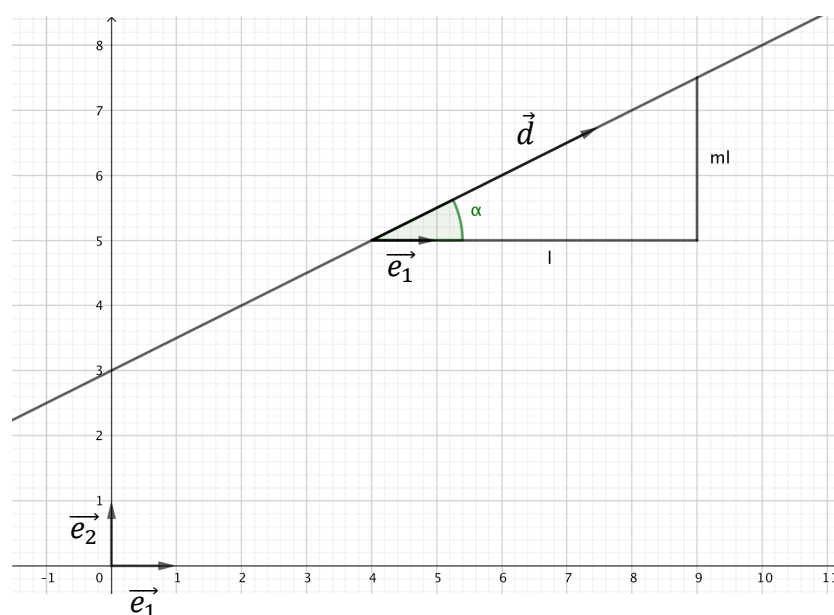
Si α est la mesure en radians d'un angle directeur de d , tout angle directeur de d a pour mesure $\alpha + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Proposition 2.1

Si m est la pente et α un angle directeur d'une droite, alors

$$m = \tan(\alpha)$$

Démonstration



$$\tan(\alpha) = \frac{ml}{l} = m$$

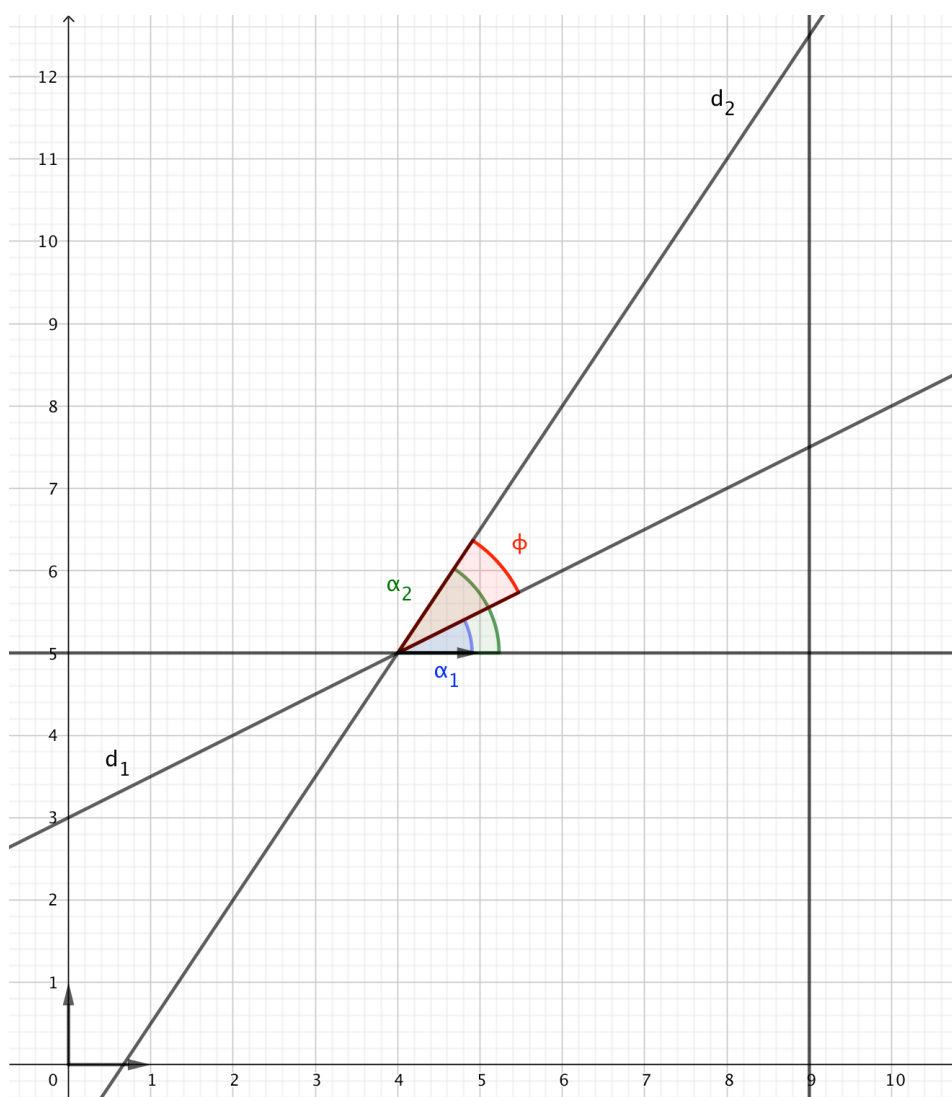
#

Proposition 2.2

Soit d_1 et d_2 deux droites de pentes respectives m_1 et m_2 . L'angle ϕ du couple $(d_1; d_2)$, c'est-à-dire un angle entre les deux droites, est donné par

$$\tan(\phi) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Démonstration



$$\tan(\phi) = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan(\alpha_2) - \tan(\alpha_1)}{1 + \tan(\alpha_2)\tan(\alpha_1)} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

#

Remarque

L'angle aigu α déterminé par deux droites d_1 et d_2 de pentes respectives m_1 et m_2 est donné par la formule $\tan(\phi) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$.

Corollaire 2.1

Deux droites non parallèles aux axes de coordonnées, et de pentes respectives m_1 et m_2 sont perpendiculaires si et seulement si :

$$m_1 m_2 + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Théorème 2.1

Le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Démonstration

La droite $(d) : ax + by + c = 0$ admet $\vec{d} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur,

c'est-à-dire parallèle à la droite (d) et comme

$$\vec{n} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -ab + ba = 0, \text{ les vecteurs } \vec{n} \text{ et } \vec{d} \text{ sont}$$

perpendiculaires, donc $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à la droite d'équation

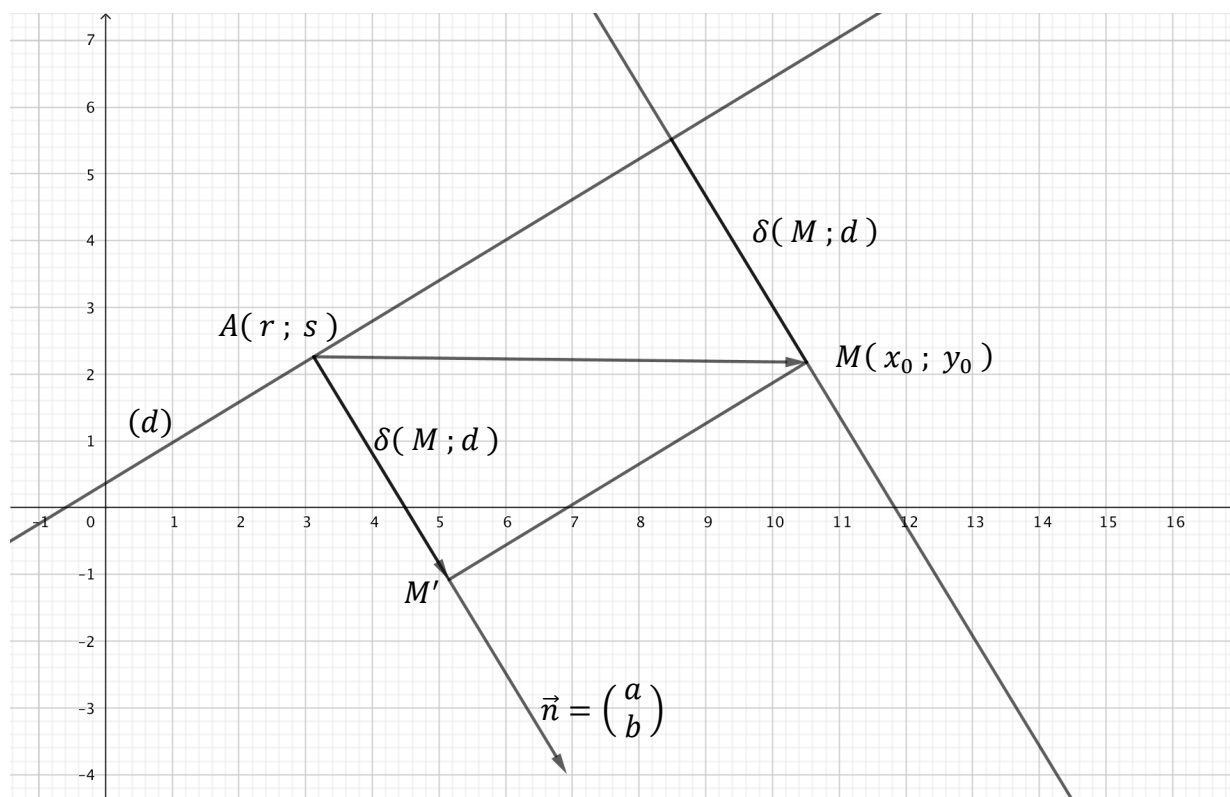
$$ax + by + c = 0.$$

#

Corollaire 2.2

1. L'équation d'une droite perpendiculaire à la droite d'équation $ax + by + c = 0$ peut s'écrire $bx - ay = k$ où k est un nombre réel.
2. Les droites $(d) : ax + by + c = 0$ et $(d') : a'x + b'y + c' = 0$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.

2.3 Distance d'un point à une droite



Considérons une droite d d'équation $ax + by + c = 0$ et un point $M(x_0; y_0)$.

Soit encore $A(r; s)$ un point de d : on a donc $ar + bs + c = 0$. Comme le

vecteur non nul $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à d , la distance $\delta(M; d)$ de M à d est

égale à la norme de la projection orthogonale de $\overrightarrow{AM}$ sur le vecteur $\vec{n}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \delta(M; d) &= \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} x_0 - r \\ y_0 - s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(x_0 - r) \cdot a + (y_0 - s) \cdot b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \\ &= \frac{|ax_0 - ar + by_0 - bs|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 - ar - bs|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

L'équation $\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$ s'appelle **forme normale** de l'équation de d .

On déduit le résultat suivant :

Proposition 2.3

La distance d'un point à une droite d s'obtient en remplaçant dans le premier membre de la forme normale de d les lettres x et y par les coordonnées respectives du point et en prenant la valeur absolue du nombre obtenu.

2.4 Bissectrices d'une paire de droites

Les bissectrices d'une paire de droites sont le lieu géométrique des points équidistants de ces droites. Ainsi, $M(x_0; y_0)$ est sur l'une des bissectrices de la paire $(d) : ax + by + c = 0$ et $(d') : a'x + b'y + c' = 0$ si et seulement si

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x_0 + b'y_0 + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}} \text{ ou encore si et seulement si } \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x_0 + b'y_0 + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

Proposition 2.4

Les équations des bissectrices d'une paire de droites s'obtiennent en exprimant que les premiers membres des équations normales de ces droites sont égaux ou opposés.

Exercices

Exercice 2.1.

Déterminer les vecteurs directeurs unitaires, un angle directeur et la pente des droites données par leurs équations :

Exercice 2.2.

Déterminer l'équation cartésienne de la droite passant par $A(-1; -5)$ et d'angle directeur 120° .

Exercice 2.3.

Un triangle est donné par les équations de ses côtés : $(a) : 2x - 3y + 5 = 0$, $(b) : 5x + y = 0$ et $(c) : -4x + 2y + 11 = 0$. Déterminer les angles directeurs de ses côtés et en déduire les angles intérieurs du triangle.

Exercice 2.4.

On donne les points $A(2; -3)$ et $B(-2; 1)$. Calculer les coordonnées des points de la droite AB dont la distance à A vaut 2.

Exercice 2.5.

Calculer l'angle des couples de droites suivants :

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| a) $(d_1) : 5x - y = 7$ | $(d_2) : 3x + 2y = 0$ |
| b) $(d_1) : 2y = 3x + 7$ | $(d_2) : 2x + 3y = 5$ |
| c) $(d_1) : x = 2y + 4$ | $(d_2) : 2x - 4y + 3 = 0$ |
| d) $(d_1) : 3x + 2y = 1$ | $(d_2) : 5x = 2y - 3$ |

Exercice 2.6.

Déterminer l'équation de la droite qui passe par $A(2; -3)$ et qui est perpendiculaire à :

a) $3x - 7y + 3 = 0$

b) $x + 9y = 11$

c) $16x = 24y - 7$

d) $2x + 3 = 0$

e) $3y = 1$

Exercice 2.7.

Montrer que les pieds des perpendiculaires abaissées du point $P(9; 5)$ sur les côtés du triangle de sommets $A(8; 8)$, $B(0; 8)$ et $C(4; 0)$ sont alignés.

Exercice 2.8.

Sans calculer les équations des côtés, déterminer les équations des hauteurs du triangle de sommets $A(2; 1)$, $B(-1; -1)$ et $C(3; 2)$.

Exercice 2.9.

Déterminer l'équation de la médiatrice d'un segment $[AB]$ si l'on donne $A(2; -3)$ et $B(-5; -2)$.

Exercice 2.10.

Calculer les coordonnées du sommet A de l'angle droit des triangles isocèles de sommet A si l'on connaît $B(2; 0)$ et $C(6; 3)$.

Exercice 2.11.

L'aire d'un triangle ABC vaut $1,5$; deux de ces sommets sont $A(2; -3)$ et $B(3; -2)$, et le centre de gravité du triangle se trouve sur la droite d d'équation $y = 3x - 8$. Calculer les coordonnées de C .

Exercice 2.12.

On donne les équations de deux côtés et d'une diagonale d'un rectangle :

$$(d_1) : x = 2y$$

$$(d_2) : 2y - x = 15$$

$$(d_3) : 7x + y = 15$$

Calculer les coordonnées de ses sommets.

Exercice 2.13.

Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du point $P(-6; 4)$ sur la droite d d'équation $4x = 5y - 3$.

Exercice 2.14.

Calculer les coordonnées du symétrique du point $P(-5; 13)$ relativement à la droite $(d) : 3y + 3 = 2x$.

Exercice 2.15.

Déterminer l'équation d'une droite connaissant le pied $P(2; 3)$ de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette droite.

Exercice 2.16.

Déterminer le point P de l'axe Ox tel que la somme de ses distances aux points $M(1; 2)$ et $N(3; 4)$ soit minimum.

Indication : si N' est le symétrique de N relativement à Ox , alors

$$\delta(P; M) + \delta(P; N) = \delta(P; M) + \delta(P; N') .$$

Exercice 2.17.

Déterminer le point P de l'axe Oy tel que $\delta(P; M) - \delta(P; N)$ soit maximum.

On donne $M(-3; 2)$ et $N(2; 5)$.

Exercice 2.18.

Déterminer les équations des droites passant par $M(2; 1)$ et déterminant avec $(d) : 2x + 3y + 4 = 0$ un angle aigu de 45° .

Exercice 2.19.

Un rayon lumineux parcourt la droite $(d) : x = 2y - 5$, et il se réfléchit sur la droite $(e) : 2y = 3x + 7$. Quelle est l'équation du rayon réfléchi ?

Exercice 2.20.

D'un triangle ABC , on donne l'équation du côté $AB : 5x - 3y + 2 = 0$, celle de la hauteur issue de $A : 4x = 3y - 1$ ainsi que celle de la hauteur issue de $B : 7x + 2y = 22$.

Calculer les coordonnées de C .

Exercice 2.21.

Déterminer les équations des côtés d'un triangle ABC connaissant $B(-4; -5)$ ainsi que les équations de deux hauteurs : $5x + 3y = 4$ et $3x + 8y + 13 = 0$.

Exercice 2.22.

Déterminer les équations des côtés d'un triangle ABC connaissant $C(4; -1)$, ainsi que les équations de la hauteur h et de la médiane m issues d'un même sommet : $(h) : 2x = 3y - 12$, $(m) : 2x + 3y = 0$.

Exercice 2.23.

Déterminer les équations des côtés d'un triangle ABC connaissant $B(2; -7)$, ainsi que les équations d'une hauteur h et d'une médiane m issues de sommets différents : $(h) : 3x + y + 11 = 0$, $(m) : x + 2y + 7 = 0$.

Exercice 2.24.

Déterminer les équations des droites équidistantes de $A(5; -3)$ et de $B(3; 7)$, qui passent par $P(-2; 3)$.

Indication : envisager deux cas selon que la droite cherchée coupe ou non le segment $[AB]$.

Exercice 2.25.

Déterminer la forme normale des équations des droites suivantes :

a) $4x - 3y = 10$

b) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 10 = 0$

c) $5y = 12x + 3$

d) $2x + 4 = 0$

e) $2y = 5$

f) $2x = y + \sqrt{5}$

Exercice 2.26.

Calculer la distance du point A à la droite d dans les cas suivants :

a) $A(2; -1)$ $(d): 4x + 3y + 10 = 0$

b) $A(0; -3)$ $(d): 5x = 12y + 23$

c) $A(-2; 3)$ $(d): 4y = 3x - 2$

d) $A(1; -2)$ $(d): x = 2y + 5$

Exercice 2.27.

Calculer l'aire d'un carré dont l'un des sommets est $A(2; -5)$ et dont l'un des côtés a pour support la droite $(d): x = 2y + 7$.

Exercice 2.28.

Calculer l'aire d'un rectangle connaissant le sommet $A(-2; 1)$ ainsi que les équations de deux côtés non parallèles : $3x = 2y + 5$ et $2x + ay + 7 = 0$.

Exercice 2.29.

Déterminer l'équation de la bissectrice de l'angle déterminé par les droites d'équation $2x = 3y + 5$ et $4y = 6x + 7$ qui coupe Ox dans sa partie négative.

Exercice 2.30.

Déterminer l'équation de la bissectrice de l'angle aigu déterminé par les droites d'équation $3x + 4y = 5$ et $12y = 5x + 3$.

Exercice 2.31.

Déterminer l'équation de la bissectrice de l'angle obtus déterminé par les droites d'équation $x = 3y - 5$ et $y = 3x + 15$.

Exercice 2.32.

Déterminer les équations des droites passant par $P(2; -1)$ et qui forment avec les droites d'équation $y = 2x + 5$ et $3x + 6y = 1$ des triangles isocèles.

Exercice 2.33.

Un triangle ABC est déterminé par les équations de ses côtés : $(AB) : 3x + 4y = 12$, $(BC) : 3x = 4y$ et $(CA) : 4x + 3y + 24 = 0$. Calculer les coordonnées du centre du cercle exinscrit du triangle dont le centre se trouve sur la bissectrice intérieure issue de B .

Exercice 2.34.

Calculer les coordonnées du centre et le rayon du cercle inscrit dans le triangle dont les côtés ont pour équation : $(a) : 3y = 4x + 24$, $(b) : 12x + 5y = 33$, $(c) : 3x + 4y + 11 = 0$.