

Réurrence

Exercice 6

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$.

• On pose la propriété
 $P_n : "u_n = 2^{n+1} + 1, \forall n \in \mathbb{N}"$

• Initialisation : $n = 0$

D'une part, $u_0 = 3$

D'autre part, $2^{0+1} + 1 = 2 + 1 = 3$
 $= u_0.$

donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

. Hérédité : Supposons P_n propriété vraie par un certain rang n , cād $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$, cād $u_{n+1} = 2^{n+2} + 1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - 1 \\ &= 2(2^{n+1} + 1) - 1 \\ &= 2 \times 2^{n+1} + 2 \times 1 - 1 \\ &= 2^{n+2} + 2 - 1 \\ &= 2^{n+2} + 1 \end{aligned}$$

donc P_n propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion: La propriété est initialisée au rang $n=0$ et est héréditaire à partir de ce rang, donc par le principe de récurrence on a :

$$u_n = 2^{n+1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

exercice:

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \quad (1) \end{cases}$$

Montrer que $u_n = 9 \times 2^n + 5$ (2)

Hérédité:

$$u_{n+1} = 2u_n - 5 \quad (1)$$

$$= 2(9 \times 2^n + 5) - 5 \quad (2)$$

$$= 9 \times 2^{n+1} + 10 - 5$$

$$= 9 \times 2^{n+1} + 5$$

— Exercice 1 —

2,5 points

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$.



Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{9 - 8n}{3 + 8n}$$



— Exercice 2 —

5,5 points

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5} \quad \textcircled{1}$$

$$= \frac{\frac{9-8n}{3+8n} - 2}{2 \times \left(\frac{9-8n}{3+8n} \right) + 5} \quad \textcircled{2}$$

$$= \frac{9-8n - 2(3+8n)}{3+8n}$$

$$\frac{18-16n + 5}{3+8n}$$

$$= \frac{9-8n-6-16n}{3+8n}$$

$$\frac{18-16n + 5(3+8n)}{3+8n}$$

$$= \frac{9-8n-6-16n}{3+8n}$$

$$\frac{18-16n + 15 + 40n}{3+8n}$$

$$= \frac{3 - 24n}{\cancel{3 + 8n}} \times \frac{\cancel{3 + 8n}}{33 + 24n}$$

$$= \frac{\overset{3 \times 1}{3} - \overset{3 \times 8}{24}n}{\underset{3 \times 11}{33} + \underset{3 \times 8}{24}n} = \frac{3(1 - 8n)}{3(11 + 8n)}$$

$$u_{n+1} = \frac{9 - 8(n+1)}{3 + 8(n+1)}$$

$$= \frac{9 - 8n - 8}{3 + 8n + 8}$$

$$= \frac{1 - 8n}{11 + 8n}$$

Exercice 1 :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 5$.

Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \times 3^n$.

$$u_0 = 2$$

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \times 3^0 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \times 1 \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = 3u_n - 5$$

$$\begin{aligned} &= 3\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \times 3^n\right) - 5 \\ &= \frac{15}{2} - \frac{1}{2} \times 3^n \times 3 - 5 \end{aligned}$$

$$= \frac{15}{2} - \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - 5$$

$$= 7,5 - 5 - \frac{1}{2} \times 3^{n+1}$$

$$= 2,5 - \frac{1}{2} \times 3^{n+1}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \times 3^{n+1}$$