



SUITES : LA RÉCURRENCE

Terminale - fiche méthode

Rédaction type bac | Idée des dominos | Cas classiques

À RETENIR EN 30 SECONDES

LES 3 MOTS-CLÉS

INITIALISATION

le premier rang est vrai

HÉRÉDITÉ

si c'est vrai au rang n , alors c'est vrai au rang $n + 1$

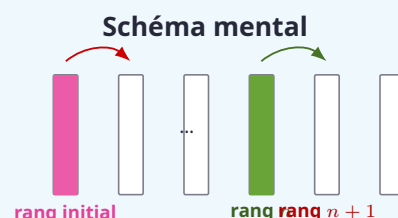
CONCLUSION

la propriété est vraie pour tout rang demandé

1. L'idée des dominos

Le raisonnement par récurrence repose sur une image simple : **une file de dominos**.

- **Initialisation** : on vérifie que le **premier domino** tombe.
- **Hérédité** : on montre que **si un domino tombe**, alors le **suivant tombe aussi**.
- **Conclusion** : tous les dominos tombent à partir du rang de départ. **Traduction mathématique** : on veut démontrer une propriété $P(n)$ pour tout entier $n \geq n_0$.



Si le premier tombe et que chaque domino fait tomber le suivant, alors toute la file tombe.

2. Principe de récurrence

On considère une propriété $P(n)$ définie pour tout entier $n \geq n_0$.

Si $P(n_0)$ est vraie et si $(P(n) \Rightarrow P(n + 1))$ pour tout $n \geq n_0$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Vocabulaire :

- **Initialisation** : on vérifie $P(n_0)$.
- **Hérédité** : on suppose $P(n)$ vraie pour un certain entier n , puis on démontre $P(n + 1)$.
- **Conclusion** : on applique le principe de récurrence.

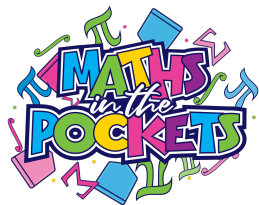
3. Rédaction type bac

Modèle de rédaction à apprendre presque par cœur

1. **On considère** la propriété $P(n)$ définie pour tout entier $n \geq n_0$ par : $\dots$.
2. **Initialisation** : on vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
3. **Hérédité** : soit $n \geq n_0$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n + 1)$ est vraie.
4. **Calcul** : on part de la bonne expression (relation de récurrence, hypothèse, fonction, etc.) et on transforme jusqu'à obtenir exactement l'énoncé voulu au rang $n + 1$.
5. **Conclusion** : la propriété est vraie au rang initial et héréditaire à partir de ce rang ; donc, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Formulations utiles :

- Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier n .
- Montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$.
- D'après l'hypothèse de récurrence, on a $\dots$.



SUITES : LA RÉCURRENCE

Terminale - fiche méthode

Rédaction type bac | Idée des dominos | Cas classiques

4. Hérédité : montrer une formule explicite

Situation-type : prouver une formule du style $u_n = \dots$.

1. Écrire l'objectif au rang $n + 1$.
2. Partir de la **relation de récurrence** entre u_{n+1} et u_n .
3. Remplacer u_n grâce à l'**hypothèse de récurrence**.
4. Calculer, développer, factoriser, simplifier.
5. Retrouver **exactement** la formule attendue pour u_{n+1} .

Trame :

$$u_{n+1} = (\text{relation de récurrence}) \implies u_{n+1} = \dots \implies u_{n+1} = \text{formule attendue}$$

Astuce : annoncer l'objectif : montrons que $u_{n+1} = \dots$.

5. Hérédité : montrer une inégalité

Situation-type : majoration, minoration ou monotonie d'une suite.

1. Partir de l'**hypothèse de récurrence** au rang n .
2. Utiliser la relation entre u_{n+1} et u_n pour fabriquer le rang suivant.
3. Avancer **comme avec des LEGO** : ajouter, soustraire, multiplier, composer, tout en surveillant le sens de l'inégalité.
4. Arriver à l'inégalité voulue au rang $n + 1$.

Attention ++

- un **nombre négatif** inverse le sens ;
- une **fonction décroissante** inverse aussi le sens ;
- suite croissante : viser souvent $u_{n+1} \geq u_n$;
- suite décroissante : viser souvent $u_{n+1} \leq u_n$.

6. Hérédité : montrer une inégalité avec une fonction

Situation-type : la suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Partir de l'hypothèse de récurrence au rang n .
2. **Appliquer la fonction** f aux deux membres.
3. Justifier si f est **croissante** ou **décroissante**.
4. En déduire l'inégalité au rang $n + 1$.

Si f est croissante

$$a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$$

Le sens est conservé.

Si f est décroissante

$$a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$$

Le sens s'inverse.

7. Pièges classiques à éviter

- Oublier de définir précisément la propriété $P(n)$.
- Oublier le **rang de départ** n_0 .
- Faire l'hérédité sans l'initialisation.
- Écrire pour tout n au lieu de pour un certain entier n .
- Ne pas justifier qu'une fonction est croissante ou décroissante.
- Ne pas retrouver exactement ce qu'il faut prouver au rang $n + 1$.
- Conclure trop vite sans citer le principe de récurrence.
- Oublier qu'une propriété peut être héréditaire mais fausse si l'initialisation ne marche pas.

8. Checklist avant un contrôle

- | | |
|---|--|
| ☐ Reconnaître une situation de récurrence. | ☐ Utiliser l'hypothèse de récurrence au bon moment. |
| ☐ Identifier la propriété $P(n)$. | ☐ Maîtriser les inégalités et leur sens. |
| ☐ Repérer le rang initial n_0 . | ☐ Utiliser une fonction croissante / décroissante. |
| ☐ Rédiger l'initialisation. | ☐ Conclure avec le principe de récurrence. |
| ☐ Rédiger l'hérédité. | ☐ Éviter les pièges de rédaction. |