

SUITES : GÉNÉRALITÉS

Première - spécialité mathématiques

Fiche récapitulative | Synthèse du cours fourni

À RETENIR EN 30 SECONDES

SUITE

une suite associe un réel à chaque entier

VARIATION

on compare u_{n+1} et u_n

LIMITE

on observe le comportement quand $n \rightarrow +\infty$

LES 3 IDÉES CLÉS

1. Définition d'une suite

Définition

$$(u_n) \text{ avec } n \in \mathbb{N} \text{ et } u_n \in \mathbb{R}$$

Une suite numérique est une **liste ordonnée de nombres**.

- ▶ u_n est le **terme de rang** n .
- ▶ n est le **rang**.
- ▶ On peut voir une suite comme une fonction

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto u(n) = u_n$$

Exemple : la suite des nombres impairs peut commencer par

1, 3, 5, 7, ...

Lecture des premiers termes

Rang	Terme
0	u_0
1	u_1
2	u_2
3	u_3

Selon les exercices, la suite peut commencer à u_0 , u_1 ou un autre rang.

2. Deux façons de définir une suite

Forme explicite

$$u_n = f(n)$$

On calcule directement le terme voulu en remplaçant n .

Exemple :

$$u_n = 3n^2 - 1$$

Alors :

$$u_0 = -1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 11, \quad u_3 = 26.$$

Définition par récurrence

$$u_{n+1} = g(u_n)$$

Il faut connaître un **terme initial** (souvent u_0 ou u_1).

Exemple :

$$u_0 = 5, \quad u_{n+1} = 3u_n$$

Alors :

$$u_1 = 15, \quad u_2 = 45, \quad u_3 = 135.$$

3. Calculer des termes et utiliser un algorithme

Réflexe méthodologique

1. Identifier le **rang de départ**.
2. Si la suite est explicite : remplacer n dans la formule.
3. Si la suite est récurrente : calculer **dans l'ordre**, terme après terme.

Important : pour une suite définie par récurrence, on ne peut pas calculer directement un terme éloigné sans passer par les précédents.

Python / algorithme Un programme peut servir à :

- calculer les termes successifs ;
- afficher un terme comme u_{25} ;
- déterminer un rang à partir d'un seuil.

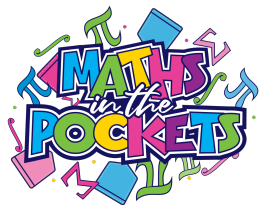
Exemple d'idée : répéter une instruction tant qu'un terme n'a pas dépassé 8.

4. Représentation graphique

Une suite se représente par un **nuage de points** de coordonnées

$$(n; u_n)$$

On place donc les rangs en abscisse et les termes correspondants en ordonnée. Contrairement à une fonction, on **ne relie pas** les points.



5. Sens de variation d'une suite

Définitions

- (u_n) est **croissante** à partir d'un certain rang si $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est **décroissante** à partir d'un certain rang si $u_{n+1} \leq u_n$.
- Si l'inégalité est stricte, on parle de **strictement** croissante ou décroissante.
- Une suite **constante** vérifie $u_{n+1} = u_n$.

Méthodes pour étudier les variations

1. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
2. Parfois, étudier le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ si les termes sont positifs.
3. Utiliser la **fonction associée** si $u_n = f(n)$.

6. Méthode-type : signe de $u_{n+1} - u_n$

Exemple : $u_n = n^2 - 4n + 4$.

On calcule :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4(n+1) + 4 - (n^2 - 4n + 4) = 2n - 3.$$

Puis on étudie son signe :

$$2n - 3 \geq 0 \iff n \geq 1,5.$$

Comme n est entier, cela donne $n \geq 2$.

Donc $u_{n+1} \geq u_n$ pour $n \geq 2$, ainsi la suite est **croissante à partir du rang 2**.

7. Fonction associée et notion de limite

Fonction associée Si $u_n = f(n)$, on peut étudier la fonction f sur un intervalle comme $[0; +\infty[$.

Si f est croissante (ou décroissante) sur cet intervalle, alors la suite (u_n) l'est aussi.

Attention : la réciproque est **fausse en général**. Une suite peut être décroissante alors que la fonction associée ne l'est pas sur tout l'intervalle.

Notion de limite Quand n devient très grand :

- si les termes se rapprochent d'une valeur ℓ , la suite **converge** vers ℓ ;
- sinon, elle est **divergente**.

On note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

Exemples :

- $u_n = \frac{2n+1}{n}$ semble converger vers 2.
- $u_n = n^2 + 1$ diverge vers $+\infty$.

8. Pièges classiques à éviter

- Toujours vérifier à **quel rang** commence la suite.
- Ne pas confondre **suite explicite** et **suite récurrente**.
- Pour une suite récurrente, calculer les termes **dans l'ordre**.
- En représentation graphique, ne pas relier les points.
- Pour les variations, penser à $u_{n+1} - u_n$ ou au rapport.
- Une suite décroissante n'implique pas forcément une fonction associée décroissante.

9. Checklist avant un contrôle

- | | |
|--|--|
| ☐ Définir ce qu'est une suite numérique. | ☐ Déterminer un sens de variation. |
| ☐ Identifier le rang et les premiers termes. | ☐ Utiliser la fonction associée si besoin. |
| ☐ Calculer des termes d'une suite explicite. | ☐ Distinguer convergence et divergence. |
| ☐ Calculer des termes d'une suite récurrente. | ☐ Lire et écrire une notation de limite. |
| ☐ Représenter (u_n) par les points $(n; u_n)$. | ☐ Comprendre l'intérêt d'un algorithme sur une suite. |