

Sujet Analyse 1

exercice 2 : $(-t^6)' = -6t^5$

1) $\int_0^x t^5 e^{-t^6} dt$

$$= \left[-\frac{1}{6} e^{-t^6} \right]_0^x$$

$$= -\frac{1}{6} e^{-x^6} + \frac{1}{6} e^0$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} e^{-x^6}$$

• $\int_0^{+\infty} t^5 e^{-t^6} dt$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t^5 e^{-t^6} dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} - \frac{1}{6} e^{-x^6}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^6} = 0$$

$$\text{Ainsi: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} - \frac{1}{6} e^{-x^6} = \frac{1}{6}.$$

Donc $\int_0^{+\infty} t^s e^{-t^6} dt$ converge
et sa valeur est $\frac{1}{6}$.

2) $t \mapsto t^s e^{-t^6}$ est continue
sur $]-\infty; +\infty[$.

. or $\int_0^{+\infty} t^s e^{-t^6} dt$ converge.

. De plus, $\int_{-\infty}^0 t^s e^{-t^6} dt =$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t^5 e^{-t^6} dt$$

$$\text{or } \int_x^0 t^5 e^{-t^6} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{6} e^{-t^6} \right]_x^0$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} e^{-x^6}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^6} = 0,$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^6 = +\infty \text{ or}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^6 = -\infty.$$

$$\text{Hence } \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} e^{-x^6} = -\frac{1}{6}.$$

Ainsi $\int_0^0 t^s e^{-t^6} dt$ converge
et sa valeur vaut $-\frac{1}{6}$.

1) Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^s e^{-t^6} dt = \int_0^0 t^s e^{-t^6} dt$
 $+ \int_0^{+\infty} t^s e^{-t^6} dt$, converge

et sa valeur vaut $-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0$.

exercice 3 :

1). $t \mapsto \frac{1}{t^{3-\alpha}}$ et $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^3}$
sont continues sur $[1, +\infty[$.

$$\frac{\frac{t^2}{1+t^3}}{\frac{1}{t^{3-\alpha}}} = \frac{t^{\cancel{2}}}{1+t^3} \times \frac{t^{\cancel{3-\alpha}}}{1}$$
$$= \frac{t^3}{1+t^3}$$

$$\text{or } \frac{t^3}{1+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^3}{t^3} = 1$$

$$\text{donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{1+t^3} = 1$$

$$\text{Ainsi } \frac{t^2}{1+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3-\alpha}} > 0$$

Ainsi par équivalence les deux intégrales ont la même nature.

• Par Riemann, on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3-\alpha}} \text{ converge ssi } 3-\alpha > 1$$

ssi $\alpha < 2$

Ainsi comme $\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^3} dt$ et

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3-\alpha}} \text{ ont même nature,}$$

alors $\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^3} dt$ converge

ssi $\alpha < 2$]

$$2) \cdot \frac{t^2}{1+t^3} \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{1} = t^2, 0$$

en effet

$$\frac{\frac{t^2}{1+t^3}}{t^2} = \frac{1}{1+t^3}$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

donc $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3} dt$ et $\int_0^1 t^2 dt$

ont même nature par équivalence

$$\cdot \text{ or } \int_0^1 t^2 dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{-2}} dt$$

Converge si $-2 < 1$

si $2 > -1$

1) Donc $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3} dt$ converge
aussi si $2 > -1$.

3) $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^3}$ est continue
sur $]0; +\infty[$.

De plus,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^3} dt = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^3} dt$$

or $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3} dt$ converge si $2 > -1$
et $\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^3} dt$ converge si $2 < 2$

Ainsi par somme,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} dt \text{ converge}$$

ssi

$$-1 < 2 < 2$$

exercice 4 :

$$1) (\operatorname{arctan}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arctan}(u))' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

$$g(t) = \operatorname{arctan}\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$u(t) = \frac{t}{a} = \frac{1}{a} \times t$$

$$u'(t) = \frac{1}{a}$$

$$g'(t) = \frac{1/a}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} = \frac{1/a}{\frac{a^2 + t^2}{a^2}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{a}} \times \frac{\cancel{a^2}}{a^2 + t^2}$$

$$= \frac{a}{a^2 + t^2}.$$

2). Seien $x > 0$ real.

$$\int_0^x \frac{2}{t^2+4} dt = \left[\arctan\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^x$$

$$\frac{a}{t^2+a^2}, a=2$$

$$= \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$- \underbrace{\arctan(0)}_{=0}$$

$$= \arctan\left(\frac{x}{2}\right).$$

$$\bullet \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2+4} dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{2}{t^2+4} dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi: $\int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2+4} dt$ converge

et sa valeur vaut $\frac{\pi}{2}$.

3) on pose $f(t) = \frac{2}{t^2+4}$,

sur $[0; +\infty[$, $f(t) > 0$ et

continue.

$$\text{or } f'(t) = 2x - \frac{2t}{(t^2+4)^2}$$

$$= \frac{-4t}{(t^2+4)^2} < 0 \text{ sur } [0; +\infty[$$

Ainsi f est continue, positive
et décroissante sur $[0; +\infty[$,

et d'après le théorème
de comparaison série-intégrale,

$$\sum f(n) \text{ et } \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

ont la même nature.

$$\text{or } \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2+4} dt \text{ converge,}$$

$$\text{donc } \sum \frac{2}{n^2+4} \text{ converge.}$$

$$4) R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^2+2}$$

Comme f est décroissante,
 alors on a l'encadrement
 suivant :

$$\int_{\underline{n+1}}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{\underline{n}}^{+\infty} f(t) dt$$

càd

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{n+1}{2}\right) \leq R_n \leq \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$$

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

on a:

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{n+1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{2}{n+1}\right)$$

et

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{n}{2}\right) = \arctan\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\text{or } \arctan\left(\frac{2}{n+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$$

$$\text{et } \arctan\left(\frac{2}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

$$\text{Donc } R_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$