

Accroissements Finis

Théorème : égalité

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$, et dérivable sur $]a; b[$.

Alors $\exists c \in]a; b[$, tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b - a)$$

Théorème : inégalité

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.

On suppose $\exists m \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}$ avec $m \leq M$, $\forall x \in]a; b[$:
telle que : $m \leq f'(x) \leq M$.

$$\Leftrightarrow : \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, \\ |f'(x)| \leq M.$$

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

$$* : |f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$$

exercice :

$$f(x) = \frac{1}{4} (1-x) e^x, \quad x \in [0, 1]$$

on donne $1,28 < e^{1/4} < 1,29$

a) f est dérivable sur $[0, 1]$.

Soit $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} (1-x) e^x \\ &= e^x \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} x \right) \\ &= -\frac{1}{4} x e^x \end{aligned}$$

$$< 0 \quad \forall x \in [0, 1].$$

donc f est strictement
décroissante sur $[0, 1]$.

b) on pose $g(x) = f(x) - x$
 $\forall x \in [0, 1]$
 $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$

on a : g continue sur $[0, 1]$,

de plus, $\forall x \in [0, 1]$ $g'(x) = -\frac{1}{4}x e^x - 1 < 0$.

Ainsi g est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

De plus, $g(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{4} > 0$

et $g(1) = f(1) - 1 = -1 < 0$.

Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $a \in [0, 1]$.

d'où $g(a) = 0 \Rightarrow f(a) - a = 0$

$$\Leftrightarrow f(a) = a.$$

Ainsi $a \in [0, 1]$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

De plus, $a = f(a) \in [f(1); f(0)]$

et $f(0) = \frac{1}{4}$ et $f(1) = 0$

Ainsi $a \in J = [0; \frac{1}{4}]$.

c) $u_0 = \frac{1}{4}, u_{n+1} = f(u_n)$

i) Soit $n \in \mathbb{N}$.

- initialisation: $u_0 = \frac{1}{4} \in J$
- Hérédité: on suppose $u_n \in J$
 $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

or f est décroissante sur $(0, \frac{1}{4}]$

Ainsi,

$$f(0) > f(u_n) > f\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{4} > u_{n+1} > \frac{3}{16} e^{1/4} > 0$$

$$\text{donc } 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \forall x \in J, f(x) \in J$$

$$\text{et } f(J) \subset J$$

$$\Rightarrow J \text{ stable par } f.$$

(i) Montrer que, $\forall x \in J$
 $-0,081 \leq f'(x) \leq 0$

Soit $x \in J = [0; \frac{1}{4}]$

$$f'(x) = -\frac{1}{4} x e^x \leq 0$$

$$\text{or } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{et } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

$$1 \leq e^x \leq e^{1/4} \leq 1,29$$

$$\text{donc : } 0 \leq x e^x \leq \frac{1}{4} x 1,29$$

$$\text{et } -\frac{1}{4} x 0 > -\frac{1}{4} x e^x > -\frac{1}{4} x \frac{1}{4} x 1,29$$

$$\underbrace{-\frac{1,29}{16}}_{-0,081} \leq f'(x) \leq 0$$

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|u_{n+1} - a| = |f(u_n) - f(a)|$$

$$\text{or } u_n \in \mathcal{I} = [0, \tfrac{1}{2}], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{et } a \in \mathcal{I} = [0, \tfrac{1}{2}].$$

Ainsi, comme f est continue sur $[0, \tfrac{1}{2}]$, dérivable sur $[0, \tfrac{1}{2}]$ et $\forall x \in \mathcal{I}, |f'(x)| \leq 0,081$

d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|f(u_n) - f(a)| \leq 0,081 |u_n - a|$$

donc :

$$|u_{n+1} - a| \leq 0,081 |u_n - a|$$

iv) initialisation : $n = 0$

$$|u_0 - a| = \left| \frac{1}{4} - a \right|$$

$$\text{or } a \in \left[0; \frac{1}{4} \right]$$

$$0 \leq a \leq \frac{1}{4}$$

$$0 \geq -a \geq -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} - a \geq 0$$

$$\text{ainsi } 0 \leq \frac{1}{4} - a \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{4} - a \right| \leq \frac{1}{4} \times (0,081)^0$$

hérédité :

H.R : $|u_n - a| \leq \frac{1}{5} \times (0,081)^n$
or $|u_{n+1} - a| \leq 0,081 |u_n - a|$
 $\leq 0,081 \times \frac{1}{5} (0,081)^n$
 $\leq \frac{1}{5} (0,081)^{n+1}$

✓) $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - a| \leq \frac{1}{5} \times (0,081)^n$

or $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,081^n = 0$

car $-1 < 0,081 < 1$.

Ainsi $0 \leq |u_n - a| \leq \frac{1}{5} \times (0,081)^n$
 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Donc par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - a = 0,$$

i.e.:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$$