

Réurrence

exercice 14:

• Initialisation:

Pour $n = 0$, $u_0 = 2$

$$\propto \frac{2}{2 \times 0 + 1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{Donc } u_0 = \frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2$$

donc la propriété est vraie
au rang $n = 0$.

• Hérédité : Supposons la propriété $P(n)$: $u_n = \frac{2}{2n+1}$ vraie

pour un entier n fixé, et montrons $P(n+1)$, c'est-à-dire $u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1} = \frac{2}{2n+2+1} = \frac{2}{2n+3}$

$$\begin{aligned} \text{on a : } u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+u_n} & (1) \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{1+\frac{2}{2n+1}} & (2) \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} & (3) \\ &= \frac{2}{2n+1} \times \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{2}{2n+3} & (4) \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

exercice 13:

Initialisation :

Pour $n = 0$, $u_0 = 1$

et $0 < 1 < 2$

donc la propriété est vraie
au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons la
propriété $P(n) : 0 < u_n < 2$ vraie
pour un entier n fixé, et
montrons $P(n+1)$, c'est-à-dire
 $0 < u_{n+1} < 2$

on a : $0 < u_n < 2$

$$\Rightarrow 2 < 2 + u_n < 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt{2+u_n} < \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt{2} < u_{n+1} < 2$$

$$\text{donc } 0 < u_{n+1} < 2$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc vraie par tout $n \in \mathbb{N}$.

exercice :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 3 \end{array} \right.$$

$$\bullet \quad P = \frac{1}{2} P + 3$$

$$\Leftrightarrow P - \frac{1}{2} P = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} P = 3$$

$$\Leftrightarrow P = \cancel{3} \times \frac{4}{\cancel{2}} = 4$$

$u_n - 4$

• on pose

$$v_n = u_n - 4$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4$$

$$= \frac{1}{2} u_n + 3 - 4$$

$$= \frac{1}{4} u_n - 1$$

$$= \frac{1}{4} \left(u_n - \frac{4}{1} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (u_n - 4)$$

$$= \frac{1}{4} v_n.$$

(u_n) est géométrique
de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier
terme

$$v_0 = u_0 - 4 = 3 - 4 = -1$$

v_0

donc

$$v_n = v_0 \times q^n$$

$$= -1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

de plus,

$$v_n = u_n - 4$$

$$\Leftrightarrow v_n + 4 = u_n$$

et :

$$u_n = -1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ 0 & -1 < q < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{u_n} + 4 = 4$$