

exercice :

Soit la propriété $K(n)$:
 $3 \leq u_{n+1} \leq u_n$ à démontrer
par récurrence par tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Soit $n_0 = 0$

$$u_{n_0} = u_0 = 10$$

$$u_{n_0+1} = u_1 = \sqrt{u_0 + 6} = \sqrt{16} = 4$$

d'où $3 \leq 4 \leq 10$,

donc $K(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang $n > 0$, tel que $K(n)$ est vraie c'est-à-dire $3 \leq u_{n+1} \leq u_n$

Montrons qu'alors $K(n+1)$ est vraie c.à.d $3 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

on a par l'hypothèse de récurrence :

$$3 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

$$9 \leq u_{n+1} + 6 \leq u_n + 6$$

$$\sqrt{9} \leq \sqrt{u_{n+1} + 6} \leq \sqrt{u_n + 6}$$

$$3 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

Soit $K(n+1)$ est vraie.

Ainsi $K(n)$ est héréditaire.

Conclusion : ...

exercice :

Soit la propriété $W(n)$:
 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
à démontrer par récurrence pour tout $n \geq 1$.

Initialisation : Soit $n_0 = 1$

$$1^2 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$$

donc $W(1)$ est vraie.

Hérédité : On suppose
qu'il existe un rang $n \geq 1$,
tel que $W(n)$ est vraie
càd : $1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Montrons qu'alors $W(n+1)$

est vraie cād:

$$1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \text{et}$$

$$1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = (1^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2$$

or par hypothèse de récurrence

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$\text{or } (n+2)(2n+3)$$

$$= 2n^2 + 3n + 4n + 6$$

$$= 2n^2 + 7n + 6.$$

donc :

$$1^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Soit $w(n+1)$ est vraie

Ainsi $w(n)$ est héréditaire

14. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

exercice :

Soit la propriété $P(n)$
 $u_n = \frac{2}{2n+1}$ à démontrer par
récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : Soit $n_0 = 0$

$$u_{n_0} = u_0 = 2$$

$$\text{et } \frac{2}{2 \times 0 + 1} = \frac{2}{1} = 2$$

donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité: On suppose qu'il existe un rang $n > 0$ tel que $P(n)$ est vraie cād $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

Montrons qu'alors $P(n+1)$ est vraie cād $u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1}$

 $= \frac{2}{2n+3}$.

on a: $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$

et par hypothèse de récurrence

$u_n = \frac{2}{2n+1}$, donc

$$U_{n+1} = \frac{\frac{2}{2n+1}}{1 + \frac{2}{2n+1}}$$

$$= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}}$$

$$= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+3}{2n+1}}$$

$$= \frac{2}{\cancel{2n+1}} \times \frac{\cancel{2n+1}}{2n+3}$$

$$= \frac{2}{2n+3}$$

soit $P(n+1)$ est vraie
Ainsi $P(n)$ est héréditaire.

exercice :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{array} \right.$$

Montrer que $1 \leq u_n \leq 3$.

Initialisation : $n_0 = 0$

$$u_{n_0} = u_0 = 1$$

$$\text{et } 1 \leq u_{n_0} \leq 3$$



Hérédité : . . .

.

or par hypothèse de récurrence

$$1 \leq u_n \leq 3$$

$$2 \leq 2u_n \leq 6$$

$$5 \leq 2u_n + 3 \leq 9$$

$$\sqrt{5} \leq \sqrt{2u_n + 3} \leq \sqrt{9}$$

$$1 \leq \sqrt{5} \leq u_{n+1} \leq 3$$



Soit $P(n+1)$ vraie

Ainsi $P(n)$ est héréditaire.

$$u_{n+1} = \frac{1 + 2u_n}{2 + u_n}$$

$$\Rightarrow \text{Mq : } 0 < u_n \leq 1.$$

$$0 < u_n \leq 1$$

$$0 < 2u_n \leq 2$$

$$0 < 2 + u_n \leq 3$$

$$0 < 1 + 2u_n \leq 3$$

$$0 < 1 + 2u_n \leq 3$$

$$1 \leq \frac{1}{2+u_n} \leq \frac{1}{3}$$

$$\underbrace{0 \times 1}_{=0} \leq \frac{1+2u_n}{2+u_n} \leq \underbrace{3 \times \frac{1}{2}}_{=1}$$

$$(1+2u_n) \times \frac{1}{2+u_n}$$

$$= \frac{1+2u_n}{2+u_n}$$