

Révisions

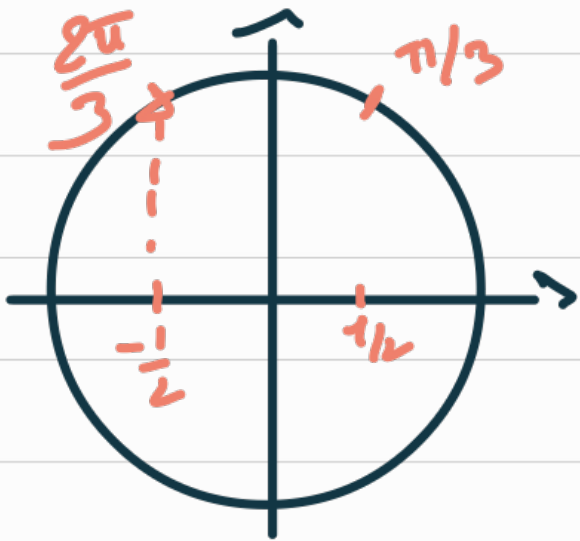
exercice: racines n -ièmes.

$$\bullet \quad Z^4 = -4 + 4i\sqrt{3}$$

$$\textcircled{1} \quad |-4 + 4i\sqrt{3}| = \sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{16 + 48}$$

$$= \sqrt{64} = 8$$



$$\cos \theta = \frac{-4}{8} = \textcircled{-\frac{1}{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi.$$

donc $-4 + 4i\sqrt{3} = 8e^{i\frac{2\pi}{3}}$

② $z = 8^{\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{2\pi/3 + 2k\pi}{4}\right)}$
 $= 8^{\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)}$

avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$z_0 = \sqrt[4]{8} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_1 = \sqrt[4]{8} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt[4]{8} e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_2 = \sqrt[4]{8} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right)} = \sqrt[4]{8} e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

$$z_3 = \sqrt[4]{8} e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt[4]{8} e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

ex: $z_0 = \sqrt[4]{8} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$
 $= 8^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2} \right)$

exercice : bijection

$$h : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-2} \rightarrow \frac{x}{x} = 1$$

1) $x \mapsto x+1$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et $x \mapsto x-2$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ainsi h est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$2) \quad h'(x) = \frac{(x-2) - (x+1)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$$

donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

3) Ainsi h est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et est strictement monotone (décroissante) sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, donc h réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ sur $h(\mathbb{R} \setminus \{2\})$.

$$\alpha \quad h(\mathbb{R} \setminus \{2\})$$

$$= h(-\infty; 2[\cup]2; +\infty[).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = -\infty$

3
0/1

$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = +\infty$

3
0/1

donc :

$h(\overset{1}{]-\infty}; \overset{-\infty}{2} \overset{+\infty}{\overset{+}{\cup}} \overset{1}{]2; +\infty[}) \overset{\text{car } h}{\rightarrow}$

$=]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[.$

Donc h réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

4) Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

on cherche $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$,
tel que :

$$y = f(x)$$

$$y = \frac{x+1}{x-2}$$

$$y(x-2) = x+1$$

$$yx - 2y = x + 1$$

$$yx - x = 1 + 2y$$

$$x(y-1) = 1+2y$$

$$x = \frac{1+2y}{y-1} \quad \checkmark \text{ car } y \neq 1$$

on pose :

$$h^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$y \mapsto \frac{2y+1}{y-1}$$

exercice : ensemble de définition

$$\bullet \quad g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$$

$$x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

$$\Rightarrow [-1; +\infty[.$$

$$x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$$



$$\begin{aligned} D_g &= [-1; 2[\cup]2; +\infty[\\ &= (-1; +\infty[) \setminus \{2\}. \end{aligned}$$

exercice : valeur absolue

$$|x - 2| = |3x + 1|$$

$$* \quad x - 2 = 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x - 3x = 1 + 2$$

$$\Leftrightarrow -2x = 3 \quad \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{3}{2}}$$

$$* \quad x - 2 = -(3x + 1)$$

$$\Rightarrow x - 2 = -3x - 1$$

$$\Rightarrow x + 3x = -1 + 2$$

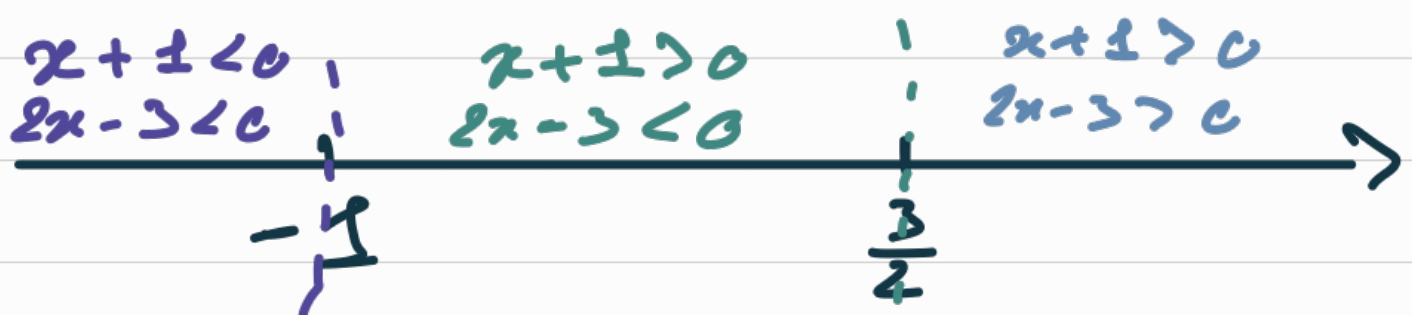
$$\Rightarrow 4x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

donc $\Rightarrow = \left\{ -\frac{3}{2} ; \frac{1}{4} \right\}$.

• $|2x - 3| + |x + 1| \leq 2x + 5$.

$x = \frac{3}{2}$ $x = -1$



$$* x \in]-\infty; -1[$$

$$-(2x-3) - (x+1) \leq 2x+5$$

$$\Leftrightarrow -2x+3-x-1 \leq 2x+5$$

$$\Leftrightarrow -3x+2 \leq 2x+5$$

$$\Leftrightarrow -3x-2x \leq 5-2$$

$$\Leftrightarrow -5x \leq 3 \quad \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{5}$$

donc $\mathcal{D}_1 = \emptyset$.

$$* x \in [-1; \frac{3}{2}[$$

$$-(2x-3) + (x+1) \leq 2x+5$$

$$\Leftrightarrow -x+4 \leq 2x+5$$

$$\Leftrightarrow -x - 2x \leq 5 - 4$$

$$\Leftrightarrow -3x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$$

donc $\mathcal{D}_2 = \left[-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right[$

* $x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

$$2x - 3 + x + 1 \leq 2x + 5$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2 \leq 2x + 5$$

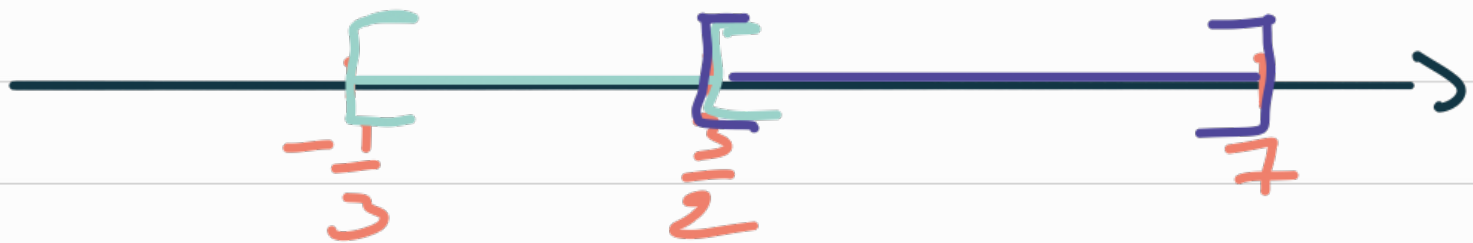
$$\Leftrightarrow x \leq 7$$

donc $\mathcal{D}_3 = \left[\frac{3}{2}; 7\right]$

Done

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$$

$$= \emptyset \cup \left[-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; 7\right]$$



$$\mathcal{D} = \left[-\frac{1}{3}; 7\right]$$