

Exercice II:

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) . f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

. De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

donc d'après le théorème
de la bijection f réalise
une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur
 $\mathbb{R}$

$$f(]0; +\infty[) =]f(0), f(+\infty)[$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{l'équation } (E_n) : f(x) = n$$

or f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$
sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
il va y avoir un unique antécédant
par f .

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) admet
une unique solution $x_n > 0$

4) on cherche $x_1 > 0$ tel
que

$$x_1 + h(x_1) = 1$$

$$\text{or } 1 + h(1) = 1 + 0 = 1.$$

par unicité, $x_1 = 1$.

5) $p = 100$ $\delta\left(\frac{p}{100}\right) < \delta(x_1) = 2$

white



7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$f(x_n) = n \text{ et } f(x_{n+1}) = n+1$$

or $n < n+1$, et d'où

$$f(x_n) < f(x_{n+1})$$

or f est strictement croissante
donc on a :

$$x_n < x_{n+1}$$

Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement
croissante.

$$8) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{h(x)}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{h(x)}{x} = 1,$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = 0$ par c.c

de plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

Ainsi $\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'
asymptote en $+\infty$.

9) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

on pose $h(x) = \ln(x) - x$

but : $h(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < x$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} > 0$$

$1-x > 0$
 $\Leftrightarrow 1 > x$

x	0	1	$+\infty$
h'	+	0	-
h	$-\infty$	-1	$-\infty$

Ainsi $h(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

donc $\ln(x) < x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

40) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

on a : $x_n + f_n(x_n) = n$

et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) < x$,

donc en particulier,

$$f_n(x_n) < x_n$$

donc $\underbrace{x_n + f_n(x_n)}_{= n} \leq 2x_n$

d'où $n \leq 2x_n$,

càd

$$\frac{n}{2} \leq x_n$$

de plus, $(x_n)_n$ strictement croissante, d'où $x_n \geq x_1 = 1$ $\forall n \geq 1$.

Ainsi $f_n(x_n) \geq f_n(1) = 0$,
par croissance de f_n .

$$\Leftrightarrow x_n + f_n(x_n) = n$$

$$\Leftrightarrow x_n = n - f_n(x_n)$$

d'où $f_n(x_n) \geq 0$

$$\Leftrightarrow -f_n(x_n) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow n - f_n(x_n) \leq 0 + n$$

$$\Leftrightarrow x_n \leq n$$

Donc $\frac{n}{2} \leq x_n \leq n, \forall n \geq 1$

11) $\forall n \in \mathbb{N}_+^*$, $x_n > \frac{n}{2}$
 or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2} = +\infty$.

donc par comparaison,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

12) $n/2 \leq x_n \leq n$

par croissance de A_n ,

$$A_n(n/2) \leq A(x_n) \leq A_n(n)$$

$$A_n(n/2) \leq A_n(x_n) \leq A_n(n).$$

$$\frac{A_n(n/2)}{n} \leq \frac{A_n(x_n)}{n} \leq \frac{A_n(n)}{n}$$

+ C.C et gendarmes.

$$\bullet \quad x_n + h(x_n) = n$$

$$\frac{x_n}{n} + \frac{h(x_n)}{n} = 1$$

par passage à la limite.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h(x_n)}{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} = 1$$

$$43) a) u_n = 1$$

$$= \frac{n - x_n}{h(n)} - 1$$

$$= \frac{n - x_n - h(n)}{h(n)}$$

$$= \frac{h(x_n) - h(n)}{h(n)}$$

$$= \frac{h\left(\frac{x_n}{n}\right)}{h(n)}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 1$$

$$\text{er } \lim_{n \rightarrow \infty} h\left(\frac{x_n}{n}\right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 1 = 0$$

càd

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

c) $1 - u_n = \frac{-\ln\left(\frac{x_n}{n}\right)}{\ln(n)}$

$$n(1 - u_n) = \frac{-n}{\ln(n)} \times \ln\left(\frac{x_n}{n}\right)$$

$$\alpha \quad \frac{x_n}{n} = 1 - \frac{\ln(x_n)}{n}$$

donc $n(1 - u_n) = \frac{-n}{\ln(n)} \ln\left(1 - \frac{\ln(x_n)}{n}\right)$

et

$$n(1-u_n) = -n \frac{h\left(1 - \frac{h(x_n)}{n}\right)}{\frac{h(x_n)}{n}} \times \frac{\frac{h(x_n)}{n}}{\frac{h(x_n)}{n}}$$

$$= - \frac{h\left(1 - \frac{h(x_n)}{n}\right)}{\frac{h(x_n)}{n}} \times \frac{n \frac{h(x_n)}{n}}{h(n)}$$

$$= - \frac{h\left(1 - \frac{h(x_n)}{n}\right)}{\frac{h(x_n)}{n}} \times \frac{h(x_n)}{n}$$

$$\text{or } \frac{h(x_n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

$$\text{donc } - \frac{h\left(1 - \frac{h(x_n)}{n}\right)}{\frac{h(x_n)}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{car } n = x_n + h(x_n)$$

$$\text{or } u_n = \frac{n - x_n}{h(n)} = \frac{x_n + h(x_n) - x_n}{h(n)}$$

$$= \frac{P_n(x_n)}{n}$$

et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$,

donc $\frac{P_n(x_n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

Ainsi par produit,

$$n(1 - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$