

Algèbre Linéaire

Calcul Matriciel

- calculer un produit
- identités remarquables.
- produit est non commutatif
- calcul d'inverse
- calcul d'inverse via polynôme



$$\underbrace{A}_{\substack{\cancel{M \times M}(K) \\ \text{par } C}} \times \underbrace{B}_{\substack{\cancel{M \times P}(K) \\ \text{par } C}} \in \cancel{M \times P}(K).$$



example:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot iA = \begin{pmatrix} i & 2i \\ -i & i \end{pmatrix}$$

$$\cdot A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\cdot B \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\bullet (A + \underline{B})^2 = A^2 + \underline{AB} + \underline{BA} + B^2$$

Binôme de Newton:

si A et B commutent, alors

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

$\swarrow \searrow$
 $B^k \quad A^{n-k}$

$$O_{n \times n}(\mathbb{K}) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite
inversible s'il existe une
matrice $B \in \mathcal{M}_n(K)$ tel que

$$AB = I_n = BA$$

on note $B = A^{-1}$

exercice 15:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet 2I - A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A^2 = 2I - A.$$

$$A^2 = 2I - A$$

$$\Leftrightarrow A^2 + A = 2I$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(A^2 + A) = I$$

①

factorize par A

$$\Leftrightarrow A \times \frac{1}{2}(A + I) = I$$

$$A \times B = I$$

donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

• Déterminant:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det A = ad - cb$$

$A \in \mathcal{M}_n(K)$ est inversible
 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} + & & + \\ 1 & 0 & 2 \\ - & + & - \\ 2 & 4 & -1 \\ + & - & + \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -0 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(2 + 4) = 24$$