

Espaces vectoriels

exercice 3 :

$$F = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \\ 2x - y + z = z + t = 0 \}$$

Montrons que F est un sev
de $\mathbb{R}^4$.

$$\rightarrow 0_{\mathbb{R}^4} = (\overset{x}{0}, \overset{y}{0}, \overset{z}{0}, \overset{t}{0}) \in F ?$$

$$2 \times \overset{x}{0} - \overset{y}{0} + \overset{z}{0} = 0$$

$$\text{et } \overset{z}{0} + \overset{t}{0} = 0$$

$$\text{donc } (0, 0, 0, 0) \in F.$$

$$\rightarrow \forall x, y \in F, x + y \in F$$

Sei $(x, y, z, t) \in F$ et $(x', y', z', t') \in F$

$$(x, y, z, t) + (x', y', z', t') = (\overbrace{x+x'}^x, \overbrace{y+y'}^y, \overbrace{z+z'}^z, \overbrace{t+t'}^t)$$

$$\bullet \ell(x+x') - (y+y') + (z+z')$$

$$= \ell x + \ell x' - y - y' + z + z'$$

$$= (\underbrace{\ell x - y + z}_{=0}) + (\underbrace{\ell x' - y' + z'}_{=0})$$

$$\text{car } (x, y, z, t) \in F$$

$$\text{car } (x', y', z', t') \in F$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$\bullet (z + z') + (t + t')$$

$$= z + z' + t + t'$$

$$= \underbrace{(z + t)}_{=0} + \underbrace{(z' + t')}_{=0}$$

$$\text{car } (x, y, z, t) \in F$$

$$\text{car } (x', y', z', t') \in F$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

$$\text{donc } (x, y, z, t) + (x', y', z', t') \in F$$

$$\rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in F, \lambda x \in F$$

$$\text{Soit } \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z, t) \in F$$

$$\lambda(x, y, z, t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$$

$$\bullet \quad 2\lambda x - \lambda y + \lambda z$$

$$= \lambda (2x - y + z)$$

$$= \lambda \times 0 \quad \text{car } (x, y, z, t) \in F$$

$$= 0$$

$$\bullet \quad \lambda z + \lambda t$$

$$= \lambda (z + t)$$

$$= \lambda \times 0 \quad \text{car } (x, y, z, t) \in F$$

$$= 0$$

$$= 0$$

donc $\lambda(x, y, z, t) \in F$.

Donc F est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$.

une base d'un espace vectoriel est une famille libre et génératrice

• génératrice = engendre

$$\hookrightarrow E = \text{Span} \{ e_1, \dots, e_n \}$$

au
vect

$$\forall x \in E, x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

ex : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

• Libre = les vecteurs du span ne peuvent pas s'écrire entre eux.

$\hookrightarrow$ pas Lié

Des bases définissent des espaces vectoriels.

$$F = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \\ 2x - y + z = z + t = 0 \}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - t = 0 \\ z = -t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y}{2} + \frac{t}{2} \\ z = -t \end{cases}, (y, t) \in \mathbb{R}^2$$

$$(\underline{x}, y, \underline{z}, t)$$

$$= \left(\frac{y}{2} + \frac{t}{2}, y, -t, t \right)$$

$$= y \left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0 \right)$$

$$+ t \left(\frac{1}{2}, 0, -1, 1 \right)$$

F est de $\mathbb{R}^4$.

$$\Rightarrow F = \text{Span} \left\{ \left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0 \right), \left(\frac{1}{2}, 0, -1, 1 \right) \right\}$$

de plus, les deux vecteurs
sont non colinéaires donc une
base de F est:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0 \right); \left(\frac{1}{2}, 0, -1, 1 \right) \right\}.$$

$$\dim E = \text{Card}(\text{base})$$

$$\bullet G = \{ (t+2u, t-2u, u) : (t,u) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$(t+2u, t-2u, u)$$

$$= t(1, 1, 0) + u(2, -2, 1)$$

$$G = \text{Span} \{ (1, 1, 0), (2, -2, 1) \}$$

donc G sev de $\mathbb{R}^3$

or $(1, 1, 0)$ et $(2, -2, 1)$ ne
sont pas colinéaires, donc
forment une base.

$\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ base
de $E \iff \det(e_1 | \dots | e_n) \neq 0$