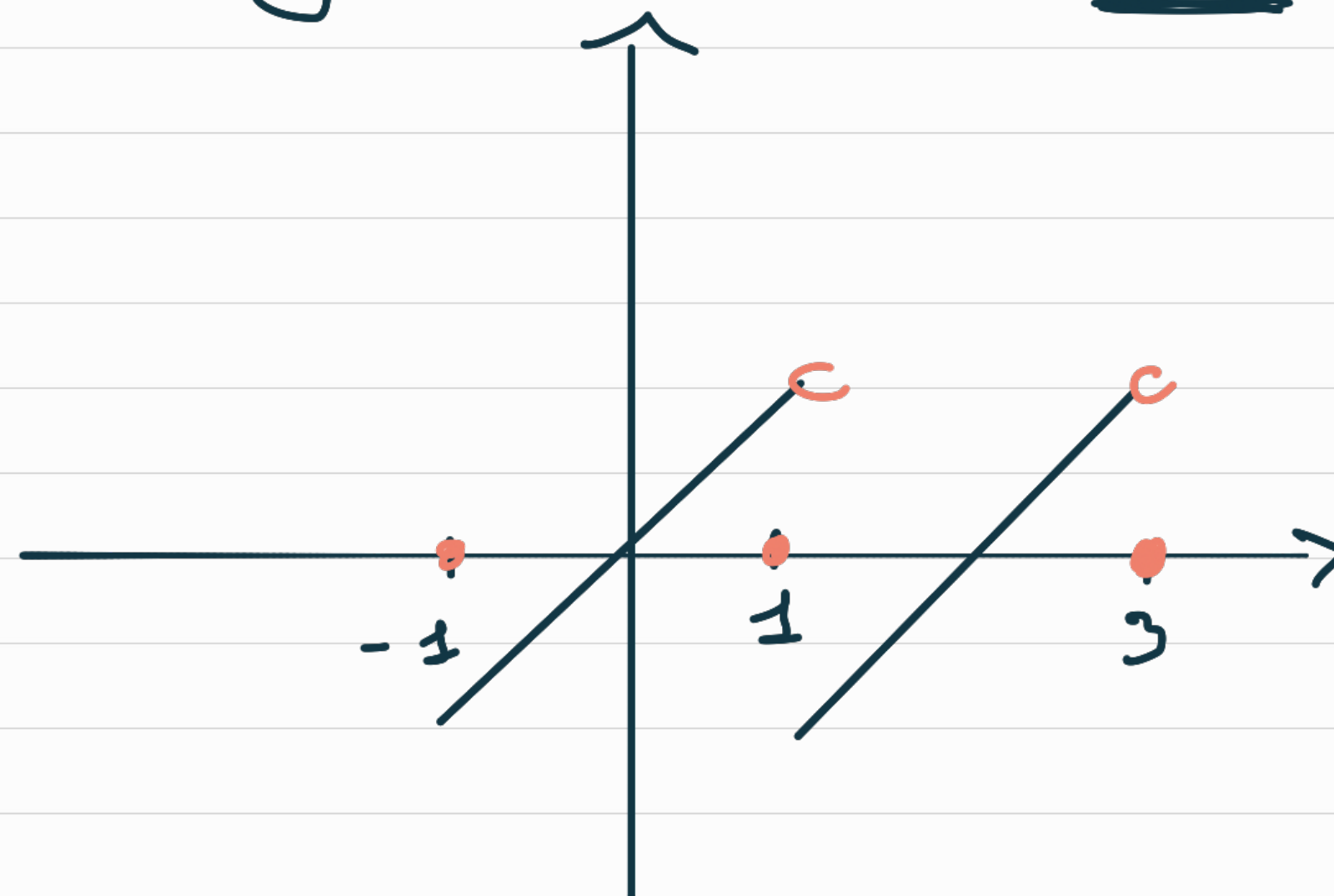


Examen 24

exercice 1 :

2) $f(x) = x$, $x \in \underline{[0, 1[}$



La fonction est $\in \mathcal{C}^1$ par morceaux et 2 -périodique, donc par Dirichlet on a

$S(x)$ converge simplement
sur $\mathbb{R}$ vers :

$$\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

Les seuls points de discontinuité sont pour les
 $x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

$$f(x^-) = 1 \quad \text{et}$$

$$f(x^+) = -1$$

$$S(x) = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$

$x \neq 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$, alors
 $S(x) = f(x)$.

Conclusion :

$$S(x) = \begin{cases} x - 2k & \overline{]2k-1; 2k+1[} \\ 0 & x = 2k+1 \end{cases}$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{car } \frac{1}{2} \in]-1; 1[$$

$$S\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{car } -\frac{1}{2} \in]-1; 1[$$

$$S(2024) = 2024 - 2 \times 1012 = 0$$

$$\text{car } 2024 \in \overline{]2023; 2025[}$$

$$S(2025) = 0 \text{ car}$$

2025 impair.

$$3) \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(n\pi x)$$

on prend $x = \frac{1}{2}$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{et } S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

done :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n=2p \\ (-1)^p & n=2p+1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{(2p+1)+1}}{2p+1} \times (-1)^p$$

$(-1)^{2p+2} = 1$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

donc

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

exercice 5:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} (e^t - e^{-t}) dt$$

1) $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{t} (e^t - e^{-t})$

est continue sur $]0; +\infty[$.

• au voisinage de 0 :

$$e^t - e^{-t} = (1 + t + o(t)) - (1 - t + o(t))$$

$$= 1 + t - 1 + t + o(t)$$

$$= 2t + o(t)$$

donc $\frac{e^{-xt}}{t} (e^t - e^{-t}) = \frac{e^{-xt}}{t} \times 2t + o(t)$

$$= 2e^{-xt} + o(t)$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 2$$

$$\text{eg: } \frac{e^{-xt}(e^t - e^{-t})}{t} = o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$$

$$t^{1/2} \frac{e^{-xt}(e^t - e^{-t})}{t}$$

$$= t^{1/2} \frac{e^{-xt}}{\cancel{t}} \times \cancel{2t} + o(t)$$

$$= t^{1/2} e^{-xt} + o(t)$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

• au voisinage de $+\infty$

$$\frac{e^{-xt}}{t} (e^t - e^{-t})$$

$$= \frac{e^{-xt}}{t} \times e^t (1 - e^{-2t})$$

$$= \frac{e^{t(1-x)}}{t} \underbrace{(1 - e^{-2t})}_{\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1}$$

$$\sim_{+\infty} \frac{e^{t(1-x)}}{t}$$

or si $x = 1$, $\sim_{+\infty} \frac{1}{t}$ DV

si $x > 1$, $1-x < 0$ par

$$c.c \quad \frac{e^{t(1-x)}}{t} \underset{t \rightarrow 0}{=} 0 \left(\frac{1}{t^2} \right) \quad c.v$$

$$\text{Si } x < 1, \quad 1-x > 0$$

$$e^{t(1-x)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{DV}$$

Donc F est bien définie sur $]1; +\infty[$.

2) on pose $f(x, t) = \frac{e^{-xt}(e^t - e^{-t})}{t}$

pour $x \in]1; +\infty[, \quad t \in]0; +\infty[$

$\rightarrow \forall \epsilon > 0, x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]1; +\infty[$

$\rightarrow \forall x > 1, \quad t \mapsto f(x, t)$
est intégrable sur $]0; +\infty[$.

$\rightarrow$ Soit $a > 1, \quad x > a$

$$|f(x, t)| = \frac{e^{-xt}}{t} (e^t - e^{-t})$$
$$\leq \frac{e^{-at}}{t} (e^t - e^{-t})$$

on pose $g(t) = \frac{e^{-at}}{t} (e^t - e^{-t})$
positive et intégrable sur
 $]0; +\infty[$.

Ainsi par le théorème
de continuité $\overline{F}$ est continue
sur $]a; +\infty[, \quad \forall a > 1$.

donc en particulier sur $\mathbb{R}; +\infty$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

$$= \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-xt}}{t} (e^t - e^{-t}) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} 0 dt$$

$$= 0$$

3) on pose $f(x, t) = \frac{e^{-xt}(e^t - e^{-t})}{t}$

pour $x \in]1; +\infty[$, $t \in]0; +\infty[$

$\rightarrow \forall t > 0$, $x \mapsto f(x, t)$ est différentiable sur $]1; +\infty[$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{-\cancel{t} e^{-xt}(e^t - e^{-t})}{\cancel{t}}$$

$$= -e^{-xt}(e^t - e^{-t})$$

$$= e^{-xt}(e^{-t} - e^t)$$

$$= e^{-t(x+1)} - e^{t(1-x)}$$

$\rightarrow \forall x > 1$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

→ Soit $a > 1$, $x \geq a$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \left| -e^{-xt} (e^t - e^{-t}) \right|$$

$$= e^{-xt} (e^t - e^{-t})$$

$$\leq e^{-at} (e^t - e^{-t})$$

$$\leq e^{-at} \times e^t$$

$$\leq e^{t(1-a)}$$

on pose $g(t) = e^{t(1-a)}$
positive et intégrable sur
 $[0; +\infty[$.

Donc par le théorème
de dérivabilité,

F est différentiable sur $[a; +\infty[$, $\forall a > -1$, en particulier sur $]1; +\infty[$.

De plus,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} (x, t) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} -e^{-xt} (e^t - e^{-t}) dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-t(x+1)} - e^{t(1-x)} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{1+x} e^{-t(x+1)} - \frac{1}{1-x} e^{t(1-x)} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$

$$4) F'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$

$$\underline{x > 1}$$

$$\Rightarrow F(x) = \ln(1+x)$$

$$- \ln|1-x|$$

$$= \ln(1+x) - \ln|x-1|$$

$$= \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$$