

Devci's

exercice 1:

1) a)
$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{1x^2 - 3x + 2}{(x - 2)(x + 2)} \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1$$

 $x_1 = 1$
 $x_2 = 2$

$$= \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} \rightarrow a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= \frac{x - 1}{x + 2}$$

$$\text{done } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{x + 2}$$

$$= \frac{2 - 1}{2 + 2} = \frac{1}{4}.$$

$$b) \frac{1}{(x-2)(x+3)} - \frac{1}{x-2}$$

$$= \frac{1 - (x+3)}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \frac{-x - 2}{(x-2)(x+3)}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x-2}{(x-2)(x+3)} = ?$$

$x < 2$ $\hookrightarrow x \rightarrow 2^-, x-2 \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x-2}{x+3} = \frac{-4}{5}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{1}{0^+} = +\infty \quad / \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$$

donc par produit

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x-2}{(x-2)(x+3)} = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x-2}{(x-2)(x+3)} = ?$$

$x > 2$

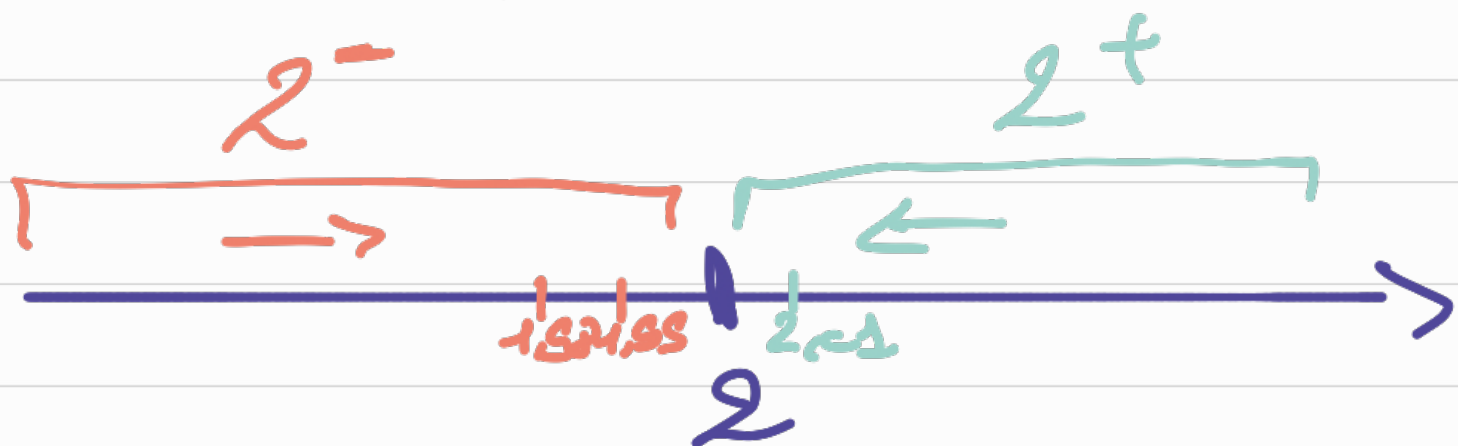
$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x-2}{x+3} = -\frac{4}{5}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x > 2$

donc par produit,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x-2}{(x-2)(x+3)} = -\infty$$



$$c) \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{\cos(x) - \overbrace{\cos(\pi/2)}^{=0}}{x - \pi/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) - \cos(\pi/2)}{x - \pi/2} = \cos'(\frac{\pi}{2})$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\sin(\frac{\pi}{2})$$

$$\hookrightarrow \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -1$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = -1.$$

$$\cos'(x) = -\sin(x) \rightarrow \cos' u = -\sin(u)$$

$$\sin'(x) = \cos(x) \rightarrow \sin' u = \cos u$$

2) a) $f(x) = \sin(x^2)$

$$u(x) = x^2 \quad u'(x) = 2x$$

$$\text{dnc } f'(x) = \cos(x^2) \times 2x \\ = 2x \cos(x^2)$$

b) $g(x) = \frac{e^{-x^2}}{x}$

$$u(x) = e^{-x^2} \quad u'(x) = -2x e^{-x^2}$$

$$v(x) = x \quad v'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{-2x e^{-x^2} \times x - e^{-x^2} \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{e^{-x^2}(-2x^2 - 1)}{x^4}$$

$$= -\frac{e^{-x^2}(2x^2 + 1)}{x^4}$$

c) $h(x) = \sqrt{(x-1)^3}$

* On a $h(x) = \sqrt{u(x)}$,
avec $u(x) = (x-1)^3$.

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction racine est dérivable sur $\textcircled{]0; +\infty[}$.

donc $u(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 > 0$

$$\Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

donc par le théorème de dérivation de fonctions composées, la fonction h est dérivable sur $]1; +\infty[$.

$$h'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

avec $u(x) = (x-1)^3$

et $u'(x) = 3(x-1)^2 \times \underline{1}$

$\square u^{n-1} \times u'$

donc $h'(x) = \frac{3(x-1)^2}{2\sqrt{(x-1)^3}}$

$\rightarrow 1/2$

$$= \frac{3}{2} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^{3/2}}$$

$$= \frac{3}{2} (x-1)^{2 - \frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt{x-1}.$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(x-1)^3} - \sqrt{(1-1)^3}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{x - 1}$$

$\sqrt{} = x^{1/2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{(x-1)^1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^{\frac{3}{2}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1}$$

$$= 0$$

donc h est dérivable
en $x = 1$, et $h'(1) = 0$.