

II. 1. Calculer $\int_0^x t^5 e^{-t^6} dt$. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^5 e^{-t^6} dt$ converge et calculer sa valeur.

2. Après avoir précisé les problèmes de convergence, déterminez la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^5 e^{-t^6} dt$. Si elle converge, donner sa valeur.

III. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3-\alpha}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^3} dt$ sont de même nature. Pour quelles valeurs de α l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^3} dt$ est-elle convergente ?

2. Trouver un équivalent simple à $\frac{t^\alpha}{1+t^3}$ quand $t \rightarrow 0$. Pour quelles valeurs de α l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^3} dt$ est-elle convergente ?

3. Après avoir précisé les problèmes de convergence, déterminer pour quelles valeurs de α l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^3} dt$ est convergente.

IV. 1. Soit $a \neq 0$. Calculer la dérivée de $g : t \mapsto \arctan(t/a)$.

2. Calculer, pour tout réel $x \geq 0$, $\int_0^x \frac{2}{t^2+4} dt$. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2+4} dt$ est convergente et calculer sa valeur.

3. Déduire de la question précédente que $\sum \frac{2}{n^2+4}$ est convergente (on énoncera avec soin le théorème utilisé).

4. Proposer un encadrement de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^2+4}$ par deux intégrales. Calculer ces intégrales. En déduire un équivalent simple à la suite (R_n) quand $n \rightarrow +\infty$.

II

1.)

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^6} = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x^6}}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} t^5 e^{-t^6} dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t^5 e^{-t^6} dt = \frac{1}{6}$$

2) $t \mapsto t^3 e^{-t^6}$ est continue sur $\mathbb{R}$; $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

donc les pb de cv
de $+\infty$; $-\infty$.

• De même,

$$\int_x^0 t^3 e^{-t^6} dt = \left[-\frac{e^{-t^6}}{6} \right]_x^0$$
$$= -\frac{1}{6} + \frac{e^{-x^6}}{6}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{6}$$

donc

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t^3 e^{-t^6} dt = -\frac{1}{6}$$

$$\int_{-a}^a \text{impaire} = 0$$

$$\int_{-a}^a \text{pair} = 2 \int_0^a \text{par}$$

III 1) $\frac{t^2}{1+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^2}{t^3} = \frac{1}{t^{3-2}}$

De plus, $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^3}$
 et $t \mapsto \frac{1}{t^{3-2}}$ sont
 continues $\left[\frac{1}{t^{3-2}} \right]_{\text{sur}} [1; +\infty[$ ~~pb~~

donc par équivalence
de fonctions positives,
les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} dt$
et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3-1}} dt$ ont même
nature.

$$\bullet \quad 3-1 > 1 \Leftrightarrow 2 < 2$$

IV 1) $g'(t) = \frac{a}{a^2+t^2}$

2) $\frac{2}{t^2+4}$ $\swarrow$ $a=2$

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{t^2+4} dt = \left[\arctan\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{\infty}$$

$$4) R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^2 + 4}.$$

Comme f est décroissante
alors $\forall n \geq 1$,

$$\int_{k+1}^k f(t) dt \leq f(k) \leq \int_k^{k-1} f(t) dt$$

en sommant de $n+1$ à N

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n+1}^N f(k) \leq \int_n^N f(t) dt$$

en faisant tendre N vers
 $+\infty$, on obtient :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$$

cad:

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{2}{t^2+4} dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{2}{t^2+4} dt$$

$$cr \int_{n+1}^x \frac{2}{t^2+4} dt$$

$$= \left[\arctan\left(\frac{t}{2}\right) \right]_{n+1}^x$$

$$= \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \arctan\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$p_k : \quad \frac{x}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{et } \arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } \int_{n+1}^{+\infty} \frac{2}{t^2+4} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$\text{et de même, } \int_n^{+\infty} \frac{2}{t^2+4} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\forall x \geq 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \leq 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\hookrightarrow \pm \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

$$= \arctan\left(\frac{\pm 1}{x}\right)$$

$$\text{or } \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{n}{2}\right) = \arctan\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\text{et } \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{n+1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{2}{n+1}\right)$$

donc on a :

$$\arctan\left(\frac{2}{n+1}\right) \leq R_n \leq \arctan\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\arctan x \underset{0}{\sim} x$$

de plus, $\arctan\left(\frac{2}{n}\right) \underset{0}{\sim} \frac{2}{n}$

et $\arctan\left(\frac{2}{n+1}\right) \underset{0}{\sim} \frac{2}{n+1}$

$$\underset{0}{\sim} \frac{2}{n}$$

donc $R_n \underset{0}{\sim} \frac{2}{n}$.