

Ensembles et Applications

exercice 2:

5) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto z^3$

• Injective

f est injective si chaque image a un unique antécédent

{ preuve: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

ici en complexe les racines n -ième ne sont pas unique.

Contre-exemple : trouver
deux antécédents différents
mais qui ont la même image

$$f(z) = 1 = z^3$$

$$\hookrightarrow z^3 = 1 = 1 e^{i0\pi}$$

$$\Rightarrow z = \underline{\underline{1}} e^{i \left(\frac{0\pi + 2k\pi}{3} \right)}, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

$$z^n = r e^{i\theta} \Rightarrow z = \sqrt[n]{r} e^{i \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)}$$

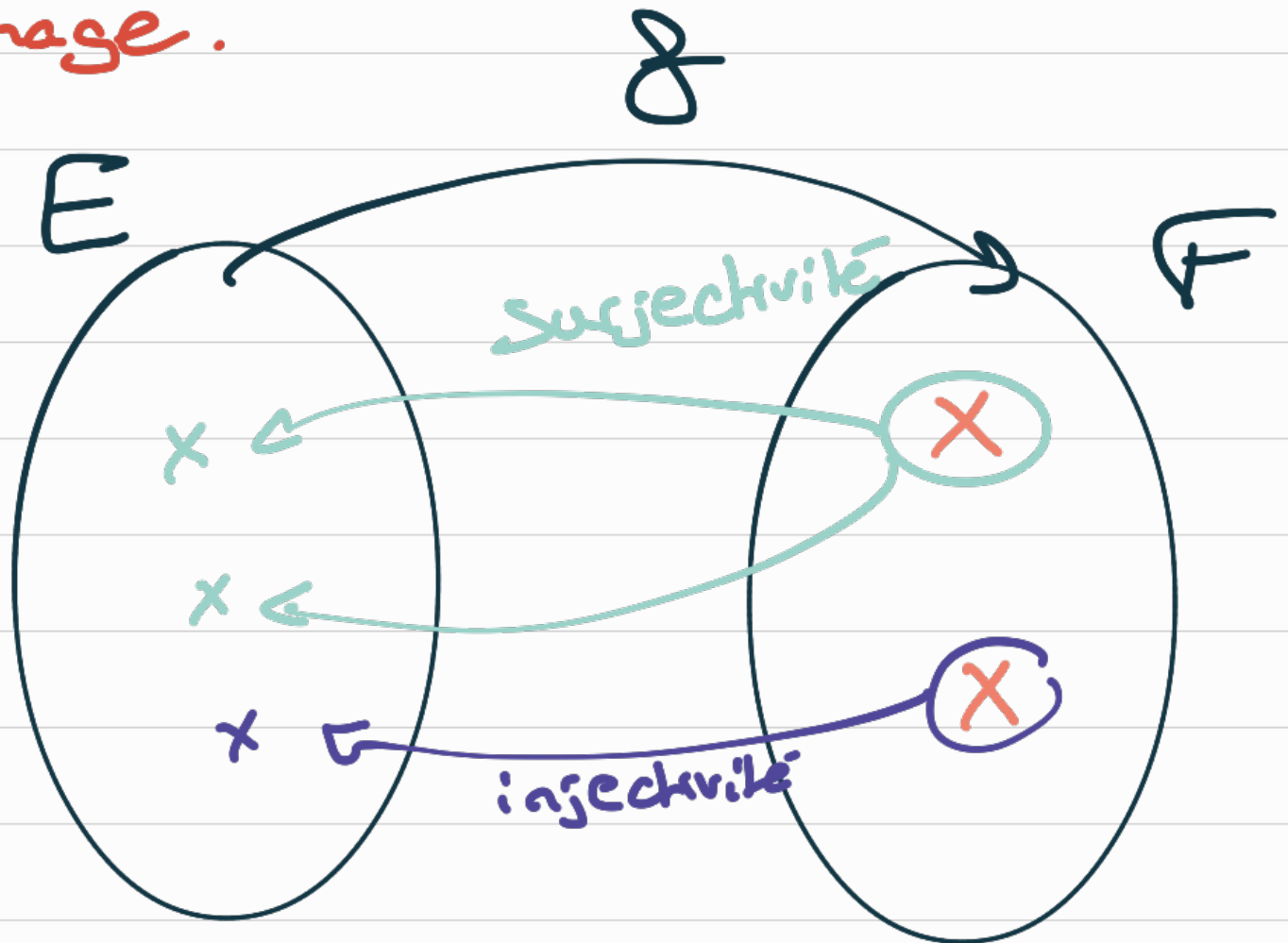
avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$z_1 = \overset{k=0}{\sqrt[3]{1}} = 1 \quad \text{et} \quad z_2 = \overset{k=1}{\sqrt[3]{1}} e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

et $f(z_1) = 1 = f(z_2)$.
donc f n'est pas injective.

• Surjective :

il y a toujours au moins un antécédent par chaque image.



Soit $w \in \mathbb{C}$ ← espace d'arrivée

On cherche $z \in \mathbb{C}$ ← espace de départ
tel que

$$f(z) = w$$

$$Z^3 = \omega$$

or $\omega = r e^{i\theta}, \quad r > 0$

donc $Z^3 = r e^{i\theta}$

et $Z = r^{\frac{1}{3}} e^{i \frac{(\theta + 2k\pi)}{3}}$

avec $k \in \{0, 1, 2\}.$

on pose $Z = r^{\frac{1}{3}} e^{i \frac{\theta}{3}}$ } $k=0$

On a bien $z \in \mathbb{C}$, et

$f(z) = z^3 = r e^{i\theta} = \omega.$

donc f est surjective.

Donc f n'est pas bijective.

2) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$n \mapsto n+1$$

• injectivité

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que
 $f(n) = f(m)$.

$$\text{or } f(n) = f(m)$$

$$\Rightarrow n+1 = m+1$$

$$\Rightarrow n = m$$

donc f est injective.

• surjective

Soit $m \in \mathbb{N}$

On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = m$

or $f(n) = m$ donne,

$$n + 1 = m \Rightarrow n = \underline{m - 1}$$

méthode : Soit $y \in \mathbb{F}$ ^{$\in \mathbb{N}$?}

On cherche $x \in E$, tel que

$$f(x) = y \Rightarrow \dots \Rightarrow x = \text{en fait.}$$

 $x \in E ? \forall y \in \mathbb{F}$ 

or $m = 0 \in \mathbb{N}$, $n = -1 \notin \mathbb{N}$
donc f n'est pas surjective

1) $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$

$$n \mapsto \begin{cases} 0 & n \text{ pair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

• injectivité :

$$f(2) = 0 = f(4)$$

donc f n'est pas injective.

• surjective : Soit $m \in \{0, 1\}$

on cherche $n \in \mathbb{N}$ tel
que $f(n) = m$.

$\rightarrow$ si $m = 0$, on pose $n = 2 \in \mathbb{N}$

$\rightarrow$ si $m = 1$, on pose $n = 1 \in \mathbb{N}$.

done I est surjective.