

Suites définies par itération d'une fonction

Deux exercices - point fixe et contraction

Exercice 1 - Fonction logarithme

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x) + \frac{1}{4}.$$

On pourra utiliser l'encadrement

$$0,40 < \ln\left(\frac{3}{2}\right) < 0,41.$$

- a. Étudier les variations de f sur $[0, 1]$.
- b. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $[0, 1]$ une unique solution, notée α .
Vérifier que

$$\alpha \in J = \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

- c. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

- i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.
- ii. Montrer que, pour tout $x \in J$,

$$0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

- iii. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

- iv. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- v. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Suites définies par itération d'une fonction

Deux exercices - point fixe et contraction

Exercice 2 - Fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \frac{1}{2+x}.$$

- a. Étudier les variations de f sur $[0, 1]$.
- b. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $[0, 1]$ une unique solution, notée α .
Vérifier que

$$\alpha \in J = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right].$$

- c. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

- i. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.
- ii. Montrer que, pour tout $x \in J$,

$$-\frac{9}{49} \leq f'(x) < 0.$$

- iii. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{9}{49} |u_n - \alpha|.$$

- iv. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{6} \left(\frac{9}{49} \right)^n.$$

- v. En déduire la limite de la suite (u_n) .