

Fiche d'entraînement – Khôlle

Série 3 – Préparation complète

Valeurs absolues – Bijection et réciproque – Complexes – Composées – Domaines de définition

Exercice 1 – Équations et inéquations avec valeurs absolues

Résoudre dans $\mathbb{R}$ en détaillant les changements de signe et les équivalences.

1. Résoudre l'équation

$$|2x - 1| + |x + 3| = 9.$$

Présenter une étude par intervalles.

2. Résoudre l'inéquation

$$|x^2 - 3x - 4| \leq 6.$$

Justifier le passage à une double inégalité, puis conclure sous forme d'intervalles.

Exercice 2 – Continuité, monotonie, bijection et réciproque

On considère la fonction

$$f :]3, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \frac{9}{x}.$$

1. Montrer que f est continue sur $]3, +\infty[$.
2. Calculer $f'(x)$, puis étudier les variations de f sur cet intervalle.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine.
4. Montrer que f réalise une bijection de $]3, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
5. Pour $y \in J$, résoudre $y = x + \frac{9}{x}$ en tenant compte de la condition $x > 3$.
6. En déduire l'expression de $f^{-1}(y)$ et son ensemble de définition.

Exercice 3 – Nombres complexes : racines et géométrie

On cherche les solutions de l'équation

$$z^3 = -8i.$$

On note z_0, z_1, z_2 les solutions, classées par arguments croissants dans $[0, 2\pi[$, et A_0, A_1, A_2 leurs images dans le plan complexe.

1. Écrire $-8i$ sous forme exponentielle.
2. Déterminer z_0, z_1, z_2 sous forme exponentielle, puis algébrique.

Exercice 4 – Composition de fonctions et dérivation

On considère les fonctions

$$f : x \mapsto \ln(x + 3) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto x^2 - 4.$$

1. Déterminer les ensembles de définition de f et de g .
2. Déterminer l'expression de $(f \circ g)(x)$ et son ensemble de définition.
3. Calculer $(f \circ g)'(x)$ en utilisant la formule de dérivation d'une composée.
4. Déterminer l'expression de $(g \circ f)(x)$ et son ensemble de définition.
5. Calculer $(g \circ f)'(x)$ sur son domaine.

Exercice 5 – Domaines de définition et extrema

Partie A – Domaines de définition. Déterminer précisément l'ensemble de définition de chaque fonction, en explicitant toutes les contraintes.

a.

$$u(x) = \frac{\sqrt{3x+6}}{x^2-1}$$

b.

$$v(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+4}\right)$$

c.

$$w(x) = \sqrt{\ln(x+2)}$$

d.

$$r(x) = \frac{1}{\ln(x^2+2x)}$$

Partie B – Recherche d'extrema.

1. Sur $[0, 5]$, déterminer le minimum et le maximum de $p(x) = x^2 - 4x + 7$, ainsi que les points où ils sont atteints.
2. Sur $[-2, 4]$, déterminer le minimum et le maximum de $q(x) = \sqrt{9 - (x-1)^2}$, ainsi que les points où ils sont atteints.

Conseil khôlle : annoncer les domaines avant tout calcul, justifier les équivalences et vérifier les solutions trouvées.